

**Comment j'avais été amené à préparer un recueil ordonné de citations de Récoltes et Semailles  
sur le thème de la dualité cohomologique  
et comment ce recueil a finalement été écarté du volume des « pré-notes » de Grothendieck**

par Laurent Lafforgue

Sur suggestion de Johanna Grothendieck, le président d'alors de la SMF, Fabien Durand, m'avait demandé de préparer un texte présentant le cadre général de la dualité cohomologique dégagé par Grothendieck, tel que lui-même en parle dans Récoltes et Semailles, un cadre dans lequel s'inscrit la dualité cohérente qui fait l'objet des pré-notes.

Après les premiers contacts, j'écrivis au président de la SMF :

« Le thème de la "dualité" est l'un des thèmes mathématiques centraux de Récoltes et Semailles : le mot apparaît plus de 400 fois, avec beaucoup de développements très riches. Le contenu des "pré-notes" de Résidus et Dualité y apparaît comme un cas particulier d'un phénomène général qui se retrouve dans tous les contextes géométriques naturels. **La découverte de "l'ubiquité" du formalisme de dualité découvert par Grothendieck et dont le contexte de Résidus et Dualité est une illustration parmi d'innombrables autres est pour lui le point le plus important, avec l'expression formelle de la dualité commune à tous les contextes et qu'il a appelée le "formalisme des six opérations"**. Particulièrement extraordinaire est pour lui le fait que ce formalisme est commun aux "coefficients continus" (contexte où il étend en particulier la dualité de Serre) et aux "coefficients discrets" (contexte où il étend en particulier la dualité de Poincaré).

**Ce sont des choses que, écrit-il, il avait longuement présentées dans le cadre du séminaire SGA 5, mais qui n'ont jamais été rédigées par les volontaires auxquels il avait confié ses notes (comme il avait l'habitude de faire) et qui pour cette raison nous sont connues presque seulement par Récoltes et Semailles.** Par exemple, l'expression "formalisme des six opérations" aurait été oubliée si Grothendieck ne l'avait pas écrite noir sur blanc et commentée dans RS.

Il n'est pas encore complètement clair pour moi s'il suffit de choisir quelques passages de RS et de les mettre bout à bout, ou s'il faut rédiger un petit texte qui résume le contenu de RS sur le thème de la dualité. »

Le président de la SMF m'avait répondu :

« Inutile de dire que je suis incompetent sur l'Œuvre de Grothendieck.

**Je pense que tu as carte blanche en la matière.** Néanmoins à te lire j'ai le sentiment qu'un petit texte sur la dualité, SGA5 et ce que l'on peut en lire dans RS serait éclairant pour les lectrices et les lecteurs.

**Je te laisse donc prendre ta décision [...]. »**

Une fois rédigé, le texte a été refusé par le comité éditorial des Documents Mathématiques (composé alors de Javier Fresán, Emmanuel Kowalski et trois autres mathématiciens encore plus éloignés des mathématiques de Grothendieck). Voici en effet ce que m'écrivit le président de la SMF après que je lui eus envoyé le texte :

« Voici une synthèse du retour du comité de Documents Mathématiques (ci-dessous appelés DM).

Je m'empresse en préambule d'écrire que la situation est évidemment très inconfortable pour la SMF et pour moi en particulier. Je te remercie pour le travail que tu as fourni pour l'écriture de ton texte.

Voici donc ce rapport.

**Le souhait initial de Documents Mathématiques était un texte discutant des mathématiques des pré-notes. DM regrette que le sujet traité dans ton texte soit beaucoup plus large. Il leur semble que publier 35 pages qui en moyenne parlent d'autre chose que du contenu du livre n'est pas raisonnable pour un ouvrage de la Collection Documents Mathématiques.**

[...] »

Je répondis en vain au président de la SMF :

« Voici mes réactions au retour du comité éditorial de Documents Mathématiques :

[...]

- 1) Le texte que j'ai préparé est composé en quasi-totalité de citations de Récoltes et Semailles. **Ces citations se rapportent toutes au formalisme général de dualité que Grothendieck avait forgé pour la première fois sous la forme des "pré-notes" dans le contexte de la "dualité cohérente" et qu'il a appelé "formalisme des six opérations".** Il dit lui-même dans ces citations que **la découverte qu'il a faite de son ubiquité et le développement d'autres réalisations de ce formalisme, dans le contexte de "coefficients discrets" ou de "coefficients continus", figurent parmi ses plus importantes contributions aux mathématiques.**
- 2) Ce formalisme comprend un grand nombre de thèmes étroitement liés les uns aux autres (coefficients constructibles, bidualité, classes d'homologie et de cohomologie des cycles, formules de traces, etc.) qui ont été très développés dans certains des contextes et moins dans d'autres, chaque fois avec des spécificités (par exemple le lien avec la notion classique de résidu dans le contexte "cohérent" des pré-notes). **Il n'y a aucun doute pour Grothendieck que chacun des thèmes de la dualité qu'il avait mis en évidence dans l'un ou l'autre des**

**contextes envisagés doit se retrouver, chaque fois avec ses spécificités, dans tous les autres contextes géométriques ou topologiques naturels.**

Le contexte général de la dualité cohomologique et absolument tous les thèmes particuliers évoqués dans les citations de RS que j'ai rassemblées sont donc en relation étroite avec le contenu des pré-notes.

D'après ces citations de Grothendieck, **ce contexte général est le bon contexte pour envisager la dualité cohomologique dans chaque cas particulier : celui de la "dualité cohérente" qui est l'objet des pré-notes débouche sur le formalisme général des six opérations et, en sens inverse, la découverte de l'ubiquité de ce formalisme et son développement dans d'autres contextes engendrent en retour de nouvelles découvertes, comme celle d'un sixième foncteur  $f_{!}$  dans ce contexte où Grothendieck lui-même n'en avait d'abord pas soupçonné l'existence.**

- 3) Toujours d'après les citations de Grothendieck, **il avait exposé dans le séminaire SGA 5 oral (et dans les notes écrites de ses exposés confiées aux "volontaires-rédacteurs") le formalisme général des "six opérations" et ses réalisations dans une multiplicité de contextes différents.**

**Tout cela, jusqu'au nom "six opérations", a entièrement disparu du volume publié, sous la responsabilité de nul autre que Luc Illusie.**

- 4) **Les 35 pages de citations de RS que j'ai rassemblées, ordonnées et présentées forment donc le meilleur substitut de ce que Grothendieck avait présenté dans le séminaire SGA 5, et à quoi il attachait une très grande importance.**

**Ce substitut est imparfait mais il fait comprendre la vision de Grothendieck de la dualité d'une manière qui ne se trouve nulle part dans la littérature mathématique.**

**Il n'en serait pas ainsi si Luc Illusie et les autres acteurs de la publication des volumes SGA 5 et SGA 4 1/2 avaient respecté ce qu'ils avaient reçu de Grothendieck.**

Plusieurs mathématiciens à qui j'ai soumis le texte de citations m'ont dit que sa lecture leur avait beaucoup appris et les avait beaucoup éclairés.

Mes propres idées sur des aspects de la dualité de Grothendieck se sont précisées et affinées en préparant le texte.

- 5) En conclusion, **refuser un texte de citations de Grothendieck sur le thème général de la dualité cohomologique comme contexte des notes de Grothendieck consacrées au cas particulier de la dualité cohérente [...] reviendrait pour la SMF à récuser la vision de Grothendieck de ses propres mathématiques, pour la publication d'un livre dont il est l'auteur, [...]. »**