Les topos de Grothendieck comme ponts entre géométrie, sens et langages formels

par Laurent Lafforgue

(Huawei Technologies, Boulogne-Billancourt, France)

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
Ecole polytechnique, Palaiseau

Jeudi 1er février 2024

$$
\begin{tikzcd}
& \begin{array}{c} \underline{\text{images mentales}} \\ (= \text{contenus sémantiques}) \end{array} \arrow[dl, dotted, "\text{esquisser}"'] \arrow[dr, dotted, "\begin{array}{c} \underline{\text{décrire}} \\ \text{par un langage} \end{array}"] & \\
\begin{array}{c} \underline{\text{dessins}} \\ \text{schémas} \end{array} \arrow[ur, "\begin{array}{c} \underline{\text{extrapoler}} \\ (\text{en interprétant}) \end{array}"'] & & \begin{array}{c} \underline{\text{textes}} \\ (= \text{données syntactiques}) \end{array} \arrow[ul, "\begin{array}{c} \underline{\text{imaginer}} \\ (\text{comprendre}) \end{array}"]
\end{tikzcd}
$$

Modèle mathématique proposé :

topos de Grothendieck
$\mathcal{E}$

esquisser

compléter
$\mathcal{C} \mapsto \widehat{\mathcal{C}}_J = \mathcal{E}$

sites $(\mathcal{C}, J)$

$= \begin{cases} \text{“pays mathématique” } \mathcal{C} \\ + J = \text{topologie} \\ \quad = \text{principe d'extrapolation sur } \mathcal{C} \end{cases}$

description
syntactique

incarnation du
contenu sémantique
$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \mathcal{E}$

théories “géométriques”
du premier ordre
$\mathbb{T}$

$= \begin{cases} \text{vocabulaire} \\ \quad \text{(noms, verbes, } \cdots \text{)} \\ + \text{axiomes} \\ \quad \text{(règles de grammaire)} \end{cases}$

Pays mathématiques :

Définition. –
Un “pays mathématique” (ou “catégorie”) consiste en

- *des villes* $A, B, \cdots$,
- *des itinéraires* $A \rightarrow B$ *entre les villes,*
- *une loi de composition (associative) des itinéraires*

$$\left(A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C\right) \longmapsto \left(A \xrightarrow{g \circ f} C\right) \qquad \text{qui admet des unités } A \xrightarrow{\mathrm{id}_A} A.$$

Exemples de pays mathématiques :

- le pays des groupes et des homomorphismes de groupes,
- le pays des espaces topologiques et des applications continues,
- pour tout groupe G, le pays constitué de
  - une unique ville nommée G,
  - des itinéraires $G \rightarrow G$ qui sont les éléments g du groupe G,
  - la loi de composition des éléments de G,
- pour tout espace topologique X, le pays dont
  - les villes sont les ouverts $U \subseteq X$,
  - les itinéraires $U \rightarrow V$ sont les relations d'inclusion $U \subseteq V$,
  - la composition est celle des relations d'inclusion.

Le pays des pays mathématiques :

Définition. – *Un pays mathématique $\mathcal{C}$ est dit*

- *"localement petit" si, pour toutes villes A, B,*
  les itinéraires $A \to B$ forment un ensemble $\mathrm{Hom}(A, B)$,
- *"petit" si, de plus, les villes de $\mathcal{C}$ forment un ensemble.*

Définition. –
Un "jumelage international" (ou "foncteur") entre deux pays mathématiques

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

consiste à associer

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{à toute ville } X \text{ de } \mathcal{C} \text{ une ville } F(X) \text{ de } \mathcal{D}, \\ \bullet \quad \text{à tout itinéraire } X \xrightarrow{f} Y \text{ de } \mathcal{C} \text{ un itinéraire } F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \text{ de } \mathcal{D} \end{cases}$$

en respectant les compositions $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ au sens que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Observations :

- Les jumelages se composent

$$\left(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}' \xrightarrow{G} \mathcal{C}''\right) \longmapsto \left(\mathcal{C} \xrightarrow{G \circ F} \mathcal{C}''\right).$$

- Cela définit un pays dont $\begin{cases} - & \text{les villes sont les petits pays,} \\ - & \text{les itinéraires sont les jumelages.} \end{cases}$

Pays de jumelages :

Définition. – *Si $\mathcal{C} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ sont deux jumelages entre deux pays,*
un "passage" entre ces jumelages (ou "transformation de foncteurs") $\rho : F \to G$
consiste à associer à toute ville X de $\mathcal{C}$

un itinéraire $\rho(X) : F(X) \to G(X)$ *de $\mathcal{D}$,*

de sorte que, pour tout itinéraire $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$, on ait un "carré commutatif"

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\rho(X)"'] & F(Y) \arrow[d, "\rho(Y)"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

au sens que $\rho(Y) \circ F(f) = G(f) \circ \rho(X)$ *dans $\mathcal{D}$.*

Observations :

- Les passages entre jumelages de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ se composent

$$(F \xrightarrow{\rho} G \xrightarrow{\rho'} H) \longmapsto (F \xrightarrow{\rho' \circ \rho} H)\,.$$

- Cela définit un pays $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ dont
  - – les villes sont les jumelages $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$,
  - – les itinéraires sont les passages entre jumelages.
- Si $\mathcal{C}$ est un petit pays et $\mathcal{D}$ est localement petit, $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ est localement petit.

Le reflet d'une ville dans les itinéraires qui y conduisent :

Définition. – *Si $\mathcal{C}$ est un pays mathématique localement petit, le reflet $y(X)$ d'une ville X de $\mathcal{C}$ est la double application qui associe*

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{à toute ville } A \text{ de } \mathcal{C} \text{ l'ensemble} \\ \qquad\qquad \mathrm{Hom}(A,X) = \{\text{itinéraires } A \to X \text{ de } \mathcal{C}\}, \\ \bullet \quad \text{à tout itinéraire } A \xrightarrow{f} B \text{ de } \mathcal{C} \text{ l'application de composition} \\ \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(B,X) & \xrightarrow{\bullet\circ f} & \mathrm{Hom}(A,X)\,, \\ (B \xrightarrow{b} X) & \longmapsto & (A \xrightarrow{b\circ f} X)\,. \end{array} \end{cases}$$

Lemme. –

(i) *Pour toute ville X de $\mathcal{C}$, $y(X)$ est une ville de*

$$\widehat{\mathcal{C}} = [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] = \text{pays des jumelages } \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens},$$

où

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} = \text{pays dont} \begin{cases} \text{les villes sont celles de } \mathcal{C}, \\ \text{les itinéraires } B \to A \text{ sont les itinéraires } A \to B \text{ de } \mathcal{C}. \end{cases}$$

(ii) *Tout itinéraire $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ définit un passage*

$$y(f) : y(X) \longrightarrow y(Y)\,.$$

Voir un pays à travers ses reflets :

Lemme (Yoneda). –

(i) *Associer* $\begin{cases} - & \underline{\textit{à toute ville}}\ X \textit{ de } \mathcal{C}\ \underline{\textit{son reflet}}\ y(X), \\ - & \underline{\textit{à tout itinéraire}}\ X \xrightarrow{f} Y \textit{ de } \mathcal{C}\ \underline{\textit{le passage}} \\ & \qquad y(f) : y(X) \longrightarrow y(Y), \end{cases}$

définit un jumelage

$$y : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}} = [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \,.$$

(ii) *Ce jumelage est "pleinement fidèle" au sens que, pour toutes villes X, Y de $\mathcal{C}$, l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(y(X), y(Y)) \,, \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & (y(X) \xrightarrow{y(f)} y(Y)) \end{array}$$

est une bijection.

Conséquences :

- Toute ville X de $\mathcal{C}$ est caractérisée (à unique itinéraire inversible près) par son reflet $y(X)$ dans $\widehat{\mathcal{C}}$.
- Une ville P de $\widehat{\mathcal{C}}$ (ou "ville en puissance") est dite "représentable" (ou "réelle") s'il existe une ville X de $\mathcal{C}$ telle que $y(X) \cong P$.

Les propriétés extraordinaires des pays de reflets :

Proposition. – *Pour tout "pays mathématique" $\mathcal{C}$ qui est petit, le pays $\widehat{\mathcal{C}}$ de ses "reflets" (ou "préfaisceaux") a les mêmes propriétés "constructives" que le pays Ens des ensembles :*

(0) *Il est localement petit :*
les itinéraires entre paires de villes forment des ensembles.

(1) *Les produits finis et infinis $\prod_{i \in I} P_i$ sont toujours bien définis de même que les "produits fibrés"*

$$S' \times_S P \text{ définis par l'équation } s = p \text{ dans : } \begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow p \\ S' & \xrightarrow{s} & S \end{array}$$

(2) *Les sommes finies et infinies $\coprod_{i \in I} P_i$ sont bien définies et disjointes, et les relations $R \rightrightarrows P$ définissent toujours des quotients $P \twoheadrightarrow P'$.*

(3) *La formation des produits fibrés $S' \times_S \bullet$ au-dessus d'un $S' \to S$ respecte les sommes arbitraires et les quotients par une relation.*

(4) *Pour toute ville P, se donner un quotient $P \twoheadrightarrow P'$ équivaut à se donner une relation d'équivalence $R \hookrightarrow P \times P$, laquelle est alors nécessairement $R = P \times_{P'} P$.*

Complétion des “pays mathématiques” :

Définition. – *Soit $\mathcal{C}$ un “pays mathématique” qui est petit.*
On appelle ici “complétion” de $\mathcal{C}$
un jumelage vers un “pays mathématique complété” $\mathcal{E}$

$$\ell : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$

tel que

- *$\mathcal{E}$ a les mêmes propriétés (0), (1), (2), (3), (4) que le pays des ensembles,*
- *pour toutes villes E_1, E_2 de $\mathcal{E}$, se donner un itinéraire $E_1 \to E_2$ équivaut à se donner une famille d'applications*

$$\mathrm{Hom}(\ell(X), E_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\ell(X), E_2)$$

indexées par les villes X de $\mathcal{C}$ et compatibles au sens que, pour tout itinéraire $X \to Y$ de $\mathcal{C}$,

le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\ell(Y), E_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\ell(Y), E_2) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(\ell(X), E_1) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\ell(X), E_2)
\end{tikzcd}$$

commute.

Complétions et notions de recouvrements :

Définition. – *Soit une complétion* $\ell : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$
d'un petit "pays mathématique" $\mathcal{C}$.
On dit alors qu'une famille d'itinéraires de $\mathcal{C}$ *vers une ville* X

$$X_i \xrightarrow{x_i} X\,, \quad i \in I\,,$$

est un recouvrement de X *si, dans la complétion* $\mathcal{E}$,
les itinéraires $\ell(x_i) : \ell(X_i) \to \ell(X)$
font apparaître $\ell(X)$ *comme un quotient de* $\coprod_{i \in I} \ell(X_i)$.

Lemme. – *La notion de recouvrement définie par une complétion* $\ell : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$
possède les propriétés suivantes :

(A) Chaque itinéraire unité $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$ *est un recouvrement.*

(B) Si $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$ *est un recouvrement,*
alors pour tout itinéraire $X' \to X$ *existe un recouvrement* $(X'_j \xrightarrow{x'_j} X')$
tel que chaque composé $X'_j \xrightarrow{x'_j} X' \to X$ *se factorise à travers un* $X_i \xrightarrow{x_i} X$.

(C) Si $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$ *est un recouvrement,*
et chaque X_i *est recouvert par des* $X_{i,j} \to X_i$,
les composés $X_{i,j} \to X_i \to X$ *forment un recouvrement de* X.

Topologies de Grothendieck et recouvrements :

Définition. –
Soit $\mathcal{C}$ un petit "pays mathématique".
On appelle "topologie de Grothendieck" sur $\mathcal{C}$
une notion de recouvrement J
qui possède les propriétés (A), (B), (C)
du lemme précédent.

Théorème. –

(i) *Toute "complétion" $\ell : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$*
est entièrement caractérisée
par la topologie J de $\mathcal{C}$ qu'elle définit.

(ii) *Réciproquement, toute topologie J de $\mathcal{C}$*
définit une unique "complétion"

$$\mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J \, .$$

Remarque :
Une topologie J de $\mathcal{C}$ peut aussi être vue comme un "principe d'extrapolation".
Elle permet en effet d'extrapoler les constituants
de la complétion $\widehat{\mathcal{C}}_J$ à partir de ceux de $\mathcal{C}$.

Sites et topos de Grothendieck :

Définition. – *On appelle "site" une paire* $(\mathcal{C}, J)$ *constituée de*

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{un petit "pays mathématique" } \mathcal{C}, \\ \bullet \quad \text{une topologie } J \text{ de } \mathcal{C}, \\ \quad\;\; \text{c'est-à-dire une notion de recouvrement des villes de } \mathcal{C}. \end{cases}$$

Définition. – *On appelle "topos" les "pays mathématiques"* $\mathcal{E}$ *qui se construisent comme des complétions*

$$\mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J$$

de sites $(\mathcal{C}, J)$.

Remarque :
Tout topos a une infinité de telles présentations

$$\mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J\,.$$

Pour toute telle présentation,
$\mathcal{C}$ apparaît come une "esquisse" de $\mathcal{E}$,
qui permet de reconstituer $\mathcal{E}$ si elle est complétée par
un "principe d'extrapolation" J.

Le site et le topos d'un espace topologique :

Définition. – *Soit X un espace topologique.*

(i) *Il définit un site (O_X, J_X) constitué de*

- *le pays O_X dont les villes sont les ouverts U de X et les itinéraires sont les relations d'inclusion $U' \hookrightarrow U$,*
- *une topologie J_X pour laquelle les recouvrements sont les familles*

$$(U_i \hookrightarrow U)_{i \in I} \quad \text{telles que} \quad U = \bigcup_{i \in I} U_i .$$

(ii) *Ce site définit un topos $\mathcal{E}_X$.*

Proposition. –
Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. Alors :

(i) *La formation des images réciproques des ouverts de Y par f définit un jumelage $\quad f^{-1} : O_Y \longrightarrow O_X$.*

(ii) *Celui-ci se prolonge en un jumelage des complétions $\quad f^* : \mathcal{E}_Y \longrightarrow \mathcal{E}_X$ qui respecte*

- *les sommes arbitraires et les quotients par des relations $R \rightrightarrows E$,*
- *les produits finis et les produits fibrés $E_1 \times_E E_2$.*

Le pays des topos :

Définition. – *Un itinéraire entre deux topos*

est un jumelage

$$f : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$f^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$$

qui respecte

- *les sommes arbitraires et les quotients par des relations,*
- *les produits finis et les produits fibrés.*

Théorème. – *Si X, Y sont deux espaces topologiques, et Y est "sobre", se donner une application continue*

$$f : X \longrightarrow Y$$

équivaut à se donner un itinéraire de topos

$$\mathcal{E}_X \longrightarrow \mathcal{E}_Y \, .$$

Remarque : En particulier, se donner un point de Y équivaut à se donner un itinéraire de topos

$$\mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}_Y \, .$$

Pour cette raison, on appelle "points" d'un topos $\mathcal{E}$ les itinéraires de topos $\mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}$.

Géométrie des topos :

Toutes les notions habituelles de la topologie se généralisent dans le cadre des topos, en particulier celles de submersion et d'immersion :

Définition. –

(i) *Un itinéraire de topos $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ est appelé une "submersion" $\mathcal{E}' \twoheadrightarrow \mathcal{E}$ si, pour toutes villes E_1, E_2 de $\mathcal{E}$, l'application*

$$f^* : \mathrm{Hom}(E_1, E_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(f^* E_1, f^* E_2)$$

est injective.

(ii) *Un itinéraire de topos $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ est appelé une "immersion" (et fait de $\mathcal{E}'$ un sous-topos $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$) si, pour toutes villes E_1, E_2 de $\mathcal{E}'$, se donner un itinéraire $E_1 \to E_2$ équivaut à se donner une famille d'applications $\mathrm{Hom}(f^* E, E_1) \to \mathrm{Hom}(f^* E, E_2)$ indexées par les villes E de $\mathcal{E}$ et compatibles au sens que, pour tout itinéraire $E' \to E$ de $\mathcal{E}$,*

le carré
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(f^* E, E_1) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(f^* E, E_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(f^* E', E_1) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(f^* E', E_2) \end{array}$$
commute.

Géométrie des sous-topos :

Proposition. –

(i) *Les <u>sous-topos</u> $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}$ d'un topos $\mathcal{E}$ forment un <u>ensemble ordonné</u>.*

(ii) *Toute famille de sous-topos $\mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}$, $i \in I$, a une <u>réunion</u> $\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}$ et une <u>intersection</u> $\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}$.*

(iii) *On a toujours $\mathcal{E}' \cup \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i\right) = \bigcap_{i \in I} (\mathcal{E}' \cup \mathcal{E}_i)$.*

Théorème. – *Tout itinéraire de topos $\mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ admet une <u>unique factorisation</u>*

$$\mathcal{E}' \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(f) \hookrightarrow \mathcal{E}'\,.$$

Théorème. –

(i) *Tout itinéraire de topos $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}$ définit une <u>application "image"</u>*

$$f_* : (\mathcal{E}'_1 \hookrightarrow \mathcal{E}') \longmapsto (\mathrm{Im}(\mathcal{E}'_1) \hookrightarrow \mathcal{E})\,.$$

Elle <u>respecte l'ordre</u> et les <u>réunions arbitraires</u>.

(ii) *Il définit aussi une <u>application "image réciproque"</u>*

$$f^{-1} : (\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}) \longmapsto (f^{-1}\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}')$$

<u>caractérisée</u> par la propriété que $\qquad \mathcal{E}'_1 \subseteq f^{-1}\mathcal{E}_1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\mathcal{E}'_1) \subseteq \mathcal{E}_1\,.$

Elle <u>respecte l'ordre</u>, les <u>intersections arbitraires</u> et les <u>réunions finies</u>.

Syntaxe des langages formels ou "théories" :

Définition. – *On appelle "théorie (géométrique du premier ordre)"* $\mathbb{T}$ *la donnée de :*

(1) *un vocabulaire Σ qui consiste en*

- *une famille de "noms de villes", tels que par exemple G (groupe), A (anneau), M (module), $\cdots$*
- *une famille de "noms d'itinéraires" $E_1 \cdots E_n \xrightarrow{e} E$, tels que par exemple $GG \xrightarrow{\cdot} G$, $G \xrightarrow{(\bullet)^{-1}} G$, ou $AA \xrightarrow{+} A$, $AA \xrightarrow{\cdot} A$, $A \xrightarrow{-(\bullet)} A, \cdots$*
- *une famille de "noms de relations" $R \rightarrowtail E_1 \cdots E_n$, tels que par exemple $\leq \rightarrowtail EE$, $\sim \rightarrowtail EE, \cdots$*

(2) *une famille d'axiomes qui ont la forme d'implications* $\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$ *où*

- *$\vec{x} = (x_1^{E_1}, \cdots, x_n^{E_n})$ est une famille finie de "variables" $x_i^{E_i}$ associées chacune à un "nom de ville" E_i,*
- *les φ, ψ sont des "formules" en ces variables qui sont construites à partir des noms d'itinéraires ou de relations de Σ et qui s'interprètent uniquement en termes d'images d'itinéraires, de réunions arbitraires et d'intersections finies de parties.*

Les expressions sémantiques d'un langage formel :

Définition. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie (géométrique du premier ordre).*
Son "expression sémantique" dans un topos $\mathcal{E}$ est le pays mathématique

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$$

ainsi défini :

(i) *Ses villes sont les "modèles" M constitués par*

$$\left\{\begin{array}{ll} \bullet & \text{des villes } ME \text{ de } \mathcal{E} \text{ indexées par les noms de villes } E \text{ de } \mathbb{T}, \\ \bullet & \text{des itinéraires } ME_1 \times \cdots \times ME_n \xrightarrow{Me} ME \text{ de } \mathcal{E} \\ & \text{indexés par les noms d'itinéraires } e : E_1 \cdots E_n \to E \text{ de } \mathbb{T}, \\ \bullet & \text{des parties } MR \hookrightarrow ME_1 \times \cdots \times ME_n \\ & \text{indexées par les noms de relations } R \rightarrowtail E_1 \cdots E_n \text{ de } \mathbb{T}, \end{array}\right.$$

et tels que, pour tout axiome de $\mathbb{T}$

$$\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x}) \quad \textit{avec} \quad \vec{x} = (x_1^{E_1}, \cdots, x_n^{E_n}),$$

les parties définies par les formules φ et ψ

$$M\varphi \longhookrightarrow ME_1 \times \cdots \times ME_n, \quad M\psi \longhookrightarrow ME_1 \times \cdots \times ME_n$$

satisfont la condition

$$M\varphi \subseteq M\psi .$$

(ii) Ses itinéraires $M' \to M$ sont les familles d'itinéraires de $\mathcal{E}$

$$M'E \longrightarrow ME \quad \text{indexés par les noms de villes } E \text{ de } \mathbb{T}$$

qui font commuter tous les carrés :

$$\begin{tikzcd}
M'E_1 \times \cdots \times M'E_n \arrow[r, "M'e"] \arrow[d] & M'E \arrow[d] \\
ME_1 \times \cdots \times ME_n \arrow[r, "Me"] & ME
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M'R \arrow[r, hook] \arrow[d] & M'E_1 \times \cdots \times M'E_n \arrow[d] \\
MR \arrow[r, hook] & ME_1 \times \cdots \times ME_n
\end{tikzcd}$$

Le réseau des expressions sémantiques d'un langage formel :

Lemme. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie (géométrique du premier ordre).*
Tout itinéraire de topos

$$f : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$

définit naturellement un jumelage
entre les expressions sémantiques de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$

$$f^* : \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}') \, .$$

Explication : L'itinéraire $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ consiste par définition en un jumelage

$$f^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$$

qui respecte les sommes arbitraires, quotients, produits finis et produits fibrés.
Il transforme

- les villes ME de $\mathcal{E}$ en villes $f^* ME$ de $\mathcal{E}'$,
- les itinéraires $ME_1 \times \cdots \times ME_n \xrightarrow{Me} ME$ de $\mathcal{E}$
  en itinéraires $f^* ME_1 \times \cdots \times f^* ME_n \xrightarrow{f^* Me} f^* ME$ de $\mathcal{E}'$,
- les parties $MR \hookrightarrow ME_1 \times \cdots \times ME_n$ de villes de $\mathcal{E}$
  en des parties $f^* MR \hookrightarrow f^* ME_1 \times \cdots \times f^* ME_n$ de villes de $\mathcal{E}'$.

De plus, il respecte les images, réunions arbitraires et intersections finies,
donc les interprétations des formules $\varphi(\vec{x})$, $\psi(\vec{x})$
constitutives des axiomes de $\mathbb{T}$ $\qquad \varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$. □

Le réseau des pays d'itinéraires de topos :

Définition. – *Pour tous topos $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$, on note*

$$\mathrm{Geom}(\mathcal{E}', \mathcal{E})$$

le pays mathématique ainsi défini :

(i) *Ses villes sont les itinéraires de topos*

$$f : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$

c'est-à-dire les jumelages

$$f^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$$

qui respectent les sommes, quotients, produits finis et produits fibrés.

(ii) *Ses itinéraires*

$$(\mathcal{E}' \xrightarrow{f_1} \mathcal{E}) \xrightarrow{\rho} (\mathcal{E}' \xrightarrow{f_2} \mathcal{E})$$

sont les passages entre jumelages

$$\rho : f_1^* \longrightarrow f_2^* \, .$$

Lemme. – *Pour tout itinéraire de topos $g : \mathcal{E}'_2 \to \mathcal{E}'_1$*
la composition avec g

$$(\mathcal{E}'_1 \xrightarrow{f} \mathcal{E}) \longmapsto (\mathcal{E}'_2 \xrightarrow{f \circ g} \mathcal{E})$$

définit un jumelage entre pays mathématiques

$$\mathrm{Geom}(\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Geom}(\mathcal{E}'_2, \mathcal{E}) \, .$$

Théories des points d'un topos :

Si $\mathcal{E}$ est un topos, le pays des points de $\mathcal{E}$ est par définition

$$\mathrm{pt}(\mathcal{E}) = \mathrm{Geom}(\mathrm{Ens}, \mathcal{E}) \,.$$

Plus généralement, chaque $\mathrm{Geom}(\mathcal{E}', \mathcal{E})$ peut être appelé le pays des "points $\mathcal{E}'$-paramétrés" de $\mathcal{E}$.

Théorème. – *Pour toute présentation du topos $\mathcal{E}$ par un site $(\mathcal{C}, J)$*

$$\mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J \,,$$

il existe une théorie (géométrique du premier ordre) $\mathbb{T}_{\mathcal{C},J}$ dont

- *les noms de villes sont les villes X de $\mathcal{C}$,*
- *les noms d'itinéraires sont les itinéraires $X \xrightarrow{x} Y$ de $\mathcal{C}$,*

et telle que :

(1) *Tout topos $\mathcal{E}'$ définit une équivalence* $\quad \mathrm{Geom}(\mathcal{E}', \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_{\mathcal{C},J}\text{-mod}(\mathcal{E}') \,.$

(2) *Ces équivalences sont naturelles au sens que,*

pour tout itinéraire de topos $\mathcal{E}'_2 \xrightarrow{f} \mathcal{E}'_1$, on a un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Geom}(\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(\bullet)\circ f"'] & \mathbb{T}_{\mathcal{C},J}\text{-mod}(\mathcal{E}'_1) \arrow[d, "f^*"] \\
\mathrm{Geom}(\mathcal{E}'_2, \mathcal{E}) \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{T}_{\mathcal{C},J}\text{-mod}(\mathcal{E}'_2)
\end{tikzcd}$$

L'incarnation topossique de la sémantique d'un langage formel :

Théorème. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie (géométrique du premier ordre). Alors il existe un topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ muni d'un modèle*

$$U_{\mathbb{T}} \quad \text{de la théorie } \mathbb{T} \text{ dans } \mathcal{E}_{\mathbb{T}},$$

tel que, pour tout topos $\mathcal{E}$, le jumelage

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Geom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}}) & \longrightarrow & \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) \,, \\ (\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}) & \longmapsto & f^* U_{\mathbb{T}} \,, \end{array}$$

soit une équivalence.

Remarques :

(i) Le topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ muni du modèle $U_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ est unique à équivalence près. Le modèle $U_{\mathbb{T}}$ dans $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est appelé le "modèle universel" de $\mathbb{T}$.

(ii) Une implication entre deux formules $\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$ est démontrable dans $\mathbb{T}$ si et seulement si elle est satisfaite par $U_{\mathbb{T}}$.

(iii) Pour tout topos $\mathcal{E}$, il existe une infinité de théories $\mathbb{T}$ telles que

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \,.$$

Deux théories $\mathbb{T}$ et $\mathbb{T}'$ satisfont la relation

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}$$

si et seulement si leurs sémantiques sont équivalentes.