Le problème de l'engendrement des topologies de Grothendieck

Laurent Lafforgue

(Centre de recherche de Huawei, Boulogne-Billancourt, France)

Centre Lagrange, vendredi 26 avril 2024

La notion de topologie de Grothendieck :

Définition. – *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite. Un crible sur un objet X de $\mathcal{C}$ est un sous-préfaisceau de*

$$\mathrm{Hom}(\bullet, X) = y(X)\,.$$

Remarques :

- Les cribles sur un objet X forment un ensemble $\Omega(X)$.
- Tout morphisme $X' \xrightarrow{x} X$ de $\mathcal{C}$ induit une application

$$x^* : \Omega(X) \longrightarrow \Omega(X')\,.$$

Définition. – *Une topologie J sur $\mathcal{C}$ est une application*

$$X \longmapsto J(X) = \textit{sous-ensemble de } \Omega(X)$$

qui satisfait les trois axiomes suivants :

(Max) Pour tout X, $J(X)$ contient le crible maximal $\mathrm{Hom}(\bullet, X)$.

(Stab) Pour tout morphisme $X' \xrightarrow{x} X$,

$$x^* : \Omega(X) \longrightarrow \Omega(X') \textit{ envoie } J(X) \textit{ dans } J(X')\,.$$

(Trans) Pour qu'un crible $C \in \Omega(X)$ soit dans $J(X)$,
il suffit qu'existe $C' \in J(X)$ tel que

$$x^*(C) \in J(X')\,, \quad \forall\,(X' \xrightarrow{x} X) \in C'\,.$$

Une définition équivalente en termes de familles couvrantes :

Lemme. – *(i) Toute famille de morphismes* $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$ *engendre un crible, constitué des morphismes* $X' \xrightarrow{x} X$ *qui se factorisent à travers un* x_i *au moins.*
(ii) Réciproquement, tout crible est engendré par des familles $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$.

Définition. –
Si J *est une topologie sur* $\mathcal{C}$*, une famille de morphismes* $(X_i' \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$ *est dite* J*-couvrante si elle engendre un crible qui soit élément de* $J(X)$.

Proposition. – *Une notion de familles couvrantes* $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$ *est associée à une topologie* J *si et seulement si :*

- *Tout morphisme* $X' \to X$ *qui admet une section est couvrant.*
- *Toute famille de morphismes* $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$ *dont le crible engendré contient une famille couvrante est couvrant.*
- *Pour toute famille couvrante* $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$ *et tout morphisme* $X' \xrightarrow{x} X$*, il existe une famille couvrante* $(X'_{i'} \xrightarrow{x'_{i'}} X')_{i' \in I'}$ *telle que chaque* $x \circ x'_{i'} : X'_{i'} \to X$ *se factorise à travers un* $(X_i \xrightarrow{x_i} X)$.
- *Si* $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$ *est couvrante et des* $(X_{i,j} \xrightarrow{x_{i,j}} X_i)_{j \in I_i}$ *sont couvrantes, la familles des composés* $X_{i,j} \xrightarrow{x_i \circ x_{i,j}} X$*,* $i \in I$*,* $j \in I_i$*, est couvrante.*

Intersection et engendrements de topologies

Lemme. –
(i) Les topologies sur une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$ forment un ensemble ordonné par l'inclusion.
(ii) Pour toute famille de topologies $(J_i)_{i\in I}$ sur $\mathcal{C}$, l'application

$$X \longmapsto \bigcap_{i\in I} J_i(X)$$

est encore une topologie.

Corollaire. –
(i) Pour toute application

$$X \longmapsto J(X) = \text{sous-ensemble de } \Omega(X),$$

il existe une plus petite topologie $\overline{J}$ qui contienne J.
(ii) De manière équivalente, pour tout ensemble J de familles de morphismes

$$\mathcal{X} = (X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i\in I},$$

il existe une plus petite topologie $\overline{J}$ pour laquelle chaque $\mathcal{X} \in J$ soit une famille couvrante.

Remarque : Dans les deux cas, $\overline{J}$ est appelée la "topologie engendrée" par l'application ou la famille J.

L'équivalence entre le problème d'engendrement des topologies et le problème de démontrabilité en logique géométrique :

- Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre

définie à partir d'une théorie Σ de même vocabulaire

en ajoutant des axiomes $\varphi_k(\vec{x}_k) \vdash \psi_k(\vec{x}_k)$.

- Soit une présentation du topos classifiant $\mathcal{E}_\Sigma$ de Σ

$$\mathcal{E}_\Sigma \cong \widehat{\mathcal{C}}_J \quad \text{par un site } (\mathcal{C}, J),$$

et soit $\ell : \mathcal{C} \xhookrightarrow{y} \widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J$ le foncteur canonique.

- Pour toutes formules géométriques $\varphi(\vec{x})$, $\psi(\vec{x})$ en les mêmes variables $\vec{x}$,

elles induisent un monomorphisme dans $\mathcal{E}_\Sigma \cong \widehat{\mathcal{C}}_J$

$$U(\varphi \wedge \psi)(\vec{x}) \hookrightarrow U\varphi(\vec{x})$$

puis, pour toute famille épimorphique $(\ell(X_i) \xrightarrow{x_i} U\varphi(\vec{x}))_{i \in I}$,

des cribles C_{φ,ψ,x_i} des objets X_i.

Théorème (Caramello). –
Une implication $\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$ est démontrable dans la théorie $\mathbb{T}$ si et seulement si les cribles C_{φ,ψ,x_i}, $i \in I$, sont couvrants pour la topologie engendrée sur J par les cribles $C_{\varphi_k,\psi_k,x_{i_k}}$, $i_k \in I_k$.

Engendrement de topologies et intersection de sous-topos :

Proposition. – *Soit une famille de sous-topos $\mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J$, $i \in I$, définis par des topologies $J_i \supseteq J$, $i \in I$, de $\mathcal{C}$.*
Alors leur intersection

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i \longhookrightarrow \mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J$$

est définie par la topologie de $\mathcal{C}$ engendrée par l'application

$$X \longmapsto \bigcup_{i \in I} J_i(X)\,.$$

Remarque : *La topologie intersection*

$$X \longmapsto \bigcap_{i \in I} J_i(X)$$

définit le sous-topos réunion $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}$.
Cependant, si chaque J_i est définie comme topologie engendrée par une famille de cribles $C_{i,k}$, l'intersection $\bigcap\limits_{i \in I} J_i(X)$
ne peut être calculée
que si chaque topologie J_i engendrée par les $C_{i,k}$
est préalablement calculée.

Engendrement de topologies et images réciproques de sous-topos :

• On considère un morphisme de topos de faisceaux

$$f : \widehat{\mathcal{D}}_K \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$$

et les foncteurs associés

$$\ell : \mathcal{D} \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_K \,, \quad \ell : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J \,, \quad f^* \circ \ell : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_K \,.$$

• Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on peut choisir une famille épimorphique dans $\widehat{\mathcal{D}}_K$

$$(\ell(Y_k) \xrightarrow{y_k} f^* \circ \ell(X))_k \quad \text{avec} \quad Y_k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \,, \quad \forall\, k \,.$$

Alors tout crible C de X induit des cribles

$$f^*(C)_{Y_k, y_k} \quad \text{des objets } Y_k \text{ de } \mathcal{C}.$$

Proposition. – *Si des cribles C engendrent une topologie $J' \supseteq J$ sur $\mathcal{C}$, le sous-topos de $\widehat{\mathcal{D}}_K$ image réciproque de $\widehat{\mathcal{C}}_{J'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$ est défini par la topologie K' engendrée sur K par les cribles*

$$f^*(C)_{Y_k, y_k} \,.$$

Remarque : L'image directe d'un sous-topos $\widehat{\mathcal{D}}_{K'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_K$ est définie par la topologie $J' \supseteq J$ pour laquelle un crible C sur un objet X est couvrant si et seulement si les cribles $f^*(C)_{Y_k, y_k}$ sont K'-couvrants. Si K' est définie par des générateurs, cela exige de calculer l'engendrement.

Engendrement de topologies et actions de correspondances :

Proposition. – *(i) Pour toutes catégories essentiellement petites $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, le topos de préfaisceaux $\widehat{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}$ est le produit des topos de préfaisceaux $\widehat{\mathcal{C}}$ et $\widehat{\mathcal{D}}$.*
(ii) Pour des topologies J et K sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$,
le produit des topos de faisceaux $\widehat{\mathcal{C}}_J$ et $\widehat{\mathcal{D}}_K$ est $(\widehat{\mathcal{C} \times \mathcal{D}})_{J \times K}$ si $J \times K$ désigne la topologie de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ engendrée par J et K.

Conséquence : On peut appeler “correspondances” entre des sites $(\mathcal{C}, J)$ et $(\mathcal{D}, K)$

les topologies Γ de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ qui contiennent $J \times K$.

Elles induisent une paire de morphismes de topos

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xleftarrow{p} (\widehat{\mathcal{C} \times \mathcal{D}})_\Gamma \xrightarrow{q} \widehat{\mathcal{D}}_K \, .$$

Corollaire. – *L'action sur les sous-topos de $\widehat{\mathcal{C}}_J$ d'une correspondance Γ*

$$q_* \circ p^{-1} : (\widehat{\mathcal{C}}_{J'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J) \longmapsto (\widehat{\mathcal{D}}_{K'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_K)$$

envoie toute topologie $J' \supseteq J$ de $\mathcal{C}$ sur la topologie $K' \supseteq K$ de $\mathcal{D}$ pour laquelle une famille de morphismes de $\mathcal{D}$

$$(Y_i \xrightarrow{y_i} Y)_{i \in I}$$

est couvrante si et seulement si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, la famille

$$(X \times Y_i \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times y_i} X \times Y)_{i \in I}$$

est couvrante pour la topologie de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ engendrée par Γ et J'.

Stabilisation d'une famille de cribles :

On se place sur une catégorie (essentiellement) petite $\mathcal{C}$.

Pour engendrer une topologie sur $\mathcal{C}$ à partir d'une famille de cribles

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \longmapsto J(X)\,,$$

il faut d'abord la rendre stable au sens suivant :

Définition. –
Une famille de cribles sur $\mathcal{C}$

$$X \longmapsto J(X) = \textit{famille de cribles sur } X = \textit{partie de } \Omega(X)$$

est dite "stable" si, pour tout morphisme $x : X' \to X$ *de* $\mathcal{C}$,

$$x^* : \Omega(X) \longrightarrow \Omega(X')$$

envoie $J(X)$ *dans* $J(X')$.

Lemme. –
Pour toute famille de cribles sur $\mathcal{C}$

$$X \longmapsto J(X) = \textit{partie de } \Omega(X),$$

il existe une plus petite famille "stable" de cribles qui la contienne.
C'est la "stabilisation" J_s *de* J

$$X \longmapsto J_s(X) = \bigcup_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \; \bigcup_{\substack{(y : X \to Y) \\ \in \mathrm{Hom}(X,Y)}} y^*(J(Y))\,.$$

Saturation d'une famille stabilisée de cribles :

Pour engendrer une topologie sur $\mathcal{C}$ à partir d'une famille de cribles

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \longmapsto J(X)$$

et de sa stabilisation J_s, il faut rendre celle-ci "saturée" au sens suivant :

Définition. –
Une famille stable de cribles

$$X \longmapsto J_s(X)$$

est dite "saturée" si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a

$$\begin{cases} \bullet \quad J_s(X) \text{ contient le crible maximal sur } X, \\ \bullet \quad \text{tout crible sur } X \text{ qui contient un crible élément de } J_s(X) \\ \quad\;\; \text{est élément de } J_s(X). \end{cases}$$

Lemme. –
Pour toute famille stable de cribles

$$X \longmapsto J_s(X)\,,$$

il existe une plus petite famille "stable saturée" de cribles qui la contienne.
C'est la "saturation" J_{ss} de J_s

$$X \longmapsto J_{ss}(X) = \left\{ C \in \Omega(X) \,\middle|\, \begin{array}{l} C = \text{ crible maximal} \\ \text{ou } \exists\, C' \in J_s(X)\,,\ C \supseteq C' \end{array} \right\}$$

La notion de fermeture d'un crible :

On considère toujours une famille de cribles sur $\mathcal{C}$

$$X \longmapsto J(X)\,,$$

sa "stabilisation" J_s, et la "saturation" J_{ss} de J_s.

On dit qu'une famille de morphismes de $\mathcal{C}$

$$(x_i : X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$$

est J_{ss}-couvrante si le crible qu'elle engendre est élément de $J_{ss}(X)$.

Définition. – *Un crible C sur un objet X est dit "J_{ss}-fermé" si, pour tout morphisme $X' \xrightarrow{x} X$, on a* $\quad x \in C$ *s'il existe une famille J_{ss}-couvrante de morphismes $(X'_i \xrightarrow{x'_i} X')_{i \in I}$ telle que*

$$(x \circ x'_i : X'_i \to X' \to X) \in C\,, \quad \forall\, i\,.$$

Lemme. – *Toute intersection de cribles J_{ss}-fermés sur un objet X est un crible J_{ss}-fermé.*

Corollaire. – *Pour tout crible C sur un objet X de $\mathcal{C}$ existe un plus petit crible J_{ss}-fermé $\overline{C}$ qui contienne C. On l'appelle la J_{ss}-fermeture de C.*

La notion d'arbre bien ordonné :

Afin d'expliciter les fermetures des cribles, nous allons introduire une notion de "multi-recouvrement" indexé par un "arbre bien ordonné" :

Définition. – *(i) Un arbre A consiste en*

- *une suite d'ensembles A_n, $n \in \mathbb{N}$, telle que A_0 soit réduit à un unique élément,*
- *une suite d'applications entre ces ensembles*

$$f_n : A_n \longrightarrow A_{n-1}\,, \quad n \geq 1\,.$$

(ii) Un tel arbre A est dit "bien ordonné" si, pour l'ordre naturel des éléments de A, toute partie non vide admet au moins un élément maximal.

Remarques :

- Les éléments d'un arbre A sont les paires

$$(n, a) \qquad \text{telles que} \qquad n \in \mathbb{N}\,,\; a \in A_n.$$

- Etant donnés deux éléments (n, a) et (m, b) de A, on a

$$(n, a) \geq (m, b)$$

si $\quad n \geq m$

et $\quad b = (f_{m+1} \circ \cdots \circ f_{n-1} \circ f_n)(a)$.

- Une "branche" d'un tel arbre A est une suite d'éléments

$$a_0 \in A_0\,,\; a_1 \in A_1, \cdots, a_n \in A_n$$

telle que $\quad a_{i-1} = f_i(a_i)\,, \quad 1 \leq i \leq n\,.$

La notion de multi-recouvrement :

On considère toujours une famille de cribles sur $\mathcal{C}$

$$X \longmapsto J(X)\,,$$

sa "stabilisation" J_s, et la "saturation" J_{ss} de J_s.

Définition. –
Un multi-recouvrement de type J_{ss} d'un objet X de $\mathcal{C}$ consiste en :

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{un arbre bien ordonné } A = (\cdots \to A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{f_1} A_0), \\ \bullet \quad \text{une famille d'objets } X_{n,a} \text{ de } \mathcal{C} \text{ indexés par les éléments } (n,a) \text{ de } A, \\ \bullet \quad \text{une famille de morphismes de } \mathcal{C} \\ \qquad\qquad x_{n,a} : X_{n,a} \longrightarrow X_{n-1,f_n(a)}\,, \quad n \geq 1\,,\ a \in A_n\,, \end{cases}$$

tels que

• *si a_0 est l'unique élément de A_0,*

$$X_{0,a_0} = X\,,$$

• *pour tout élément (n,a) de A qui n'est pas maximal (c'est-à-dire tel que $f_{n+1}^{-1}(a) \neq \emptyset$), la famille des morphismes*

$$x_{n+1,a'} : X_{n+1,a'} \longrightarrow X_{n,a}\,, \quad a' \in f_{n+1}^{-1}(a)$$

est J_{ss}-couvrante.

Une explicitation de l'opération de fermeture de cribles :

On considère toujours les familles de cribles $J \subseteq J_s \subseteq J_{ss}$.

Théorème. – *Soit C un crible sur un objet X de $\mathcal{C}$. Soit $\overline{C}$ la J_{ss}-fermeture de C. Alors un morphisme*

$$x : X' \longrightarrow X$$

est élément de $\overline{C}$ si et seulement si il existe un multi-recouvrement de X' de type J_{ss}, indexé par un arbre bien ordonné $A = (\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_1} A_0)$, tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \text{pour tout élément maximal } (n, a_n) \text{ de } A \\ \quad \text{et sa branche } a_n, a_{n-1} = f_n(a_n), a_{n-2} = f_{n-1}(a_{n-1}), \cdots, a_0 = f_1(a_1), \\ \quad \text{le morphisme composé} \\ \qquad X_{n,a_n} \xrightarrow{x_{n,a_n}} X_{n-1,a_{n-1}} \xrightarrow{x_{n-1,a_{n-1}}} \cdots \xrightarrow{x_{1,a_1}} X_{0,a_0} = X' \xrightarrow{x} X \\ \quad \text{est élément du crible } C, \\ \quad \text{ou bien } X_{n,a_n} \text{ admet le crible vide pour } J_{ss}\text{-recouvrement.} \end{array} \right.$$

Pour la démonstration : Si $\widetilde{C}$ désigne l'ensemble des morphismes $X' \xrightarrow{x} X$ qui satisfont cette condition, on doit vérifier que

- $\widetilde{C}$ est un crible,
- ce crible est J_{ss}-fermé,
- tout crible J_{ss}-fermé qui contient C contient aussi $\widetilde{C}$.

Vérification de ce que la condition définit un crible :

- On considère un morphisme $\quad x : X' \longrightarrow X \quad$ qui est dans $\widetilde{C}$,

c'est-à-dire satisfait la condition pour un multi-recouvrement $X_\bullet$ de X' de type J_{ss} indexé par un arbre bien ordonné $A = (\cdots \to A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{f_1} A_0)$.

Si $y : Y' \to X'$ est un morphisme, il faut montrer que le composé $x \circ y : Y' \to X' \to X$ satisfait la condition pour un multi-recouvrement $Y_\bullet$ de Y' de type J_{ss} indexé par un arbre bien ordonné $B = (\cdots \to B_n \xrightarrow{g_n} B_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{g_1} B_0)$.

- On pose $B_0 = A_0 = \{a_0\}$ et $Y_{0,a_0} = Y'$.
- On construit par récurrence sur n des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} B_n \arrow[r, "t_n"] \arrow[d, "g_n"'] & A_n \arrow[d, "f_n"] \\ B_{n-1} \arrow[r, "t_{n-1}"] & A_{n-1} \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} Y_{n,b_n} \arrow[r] \arrow[d, "y_{n,b_n}"'] & X_{n,t_n(b_n)} \arrow[d, "x_{n,t_n(b_n)}"] \\ Y_{n-1,f_n(b_n)} \arrow[r] & X_{n-1,f_n\circ t_n(b_n)} \end{tikzcd}$$

tels que :

– pour tout élément $b_{n-1} \in B_{n-1}$ tel que la famille des morphismes

$$x_{n,a_n} : X_{n,a_n} \longrightarrow X_{n-1,t_{n-1}(b_{n-1})}\,, \quad a_n \in f_n^{-1}(t_{n-1}(b_{n-1}))$$

soit J_{ss}-couvrante, alors la famille des morphismes

$$y_{n,b_n} : Y_{n,b_n} \longrightarrow Y_{n-1,b_{n-1}}\,, \quad b_n \in g_n^{-1}(b_{n-1})$$

est J_{ss}-couvrante.

Vérification de ce que le crible ainsi défini est fermé :

• Considérons un morphisme $\quad x : X' \longrightarrow X$
tel qu'existe une famille J_{ss}-couvrante de morphismes

$$(x_i' : X_i' \longrightarrow X')_{i \in I}$$

telle que $\quad (x \circ x_i' : X_i' \to X' \to X) \in \widetilde{C}\,, \quad \forall\, i\,.$

• Il faut montrer qu'alors $\quad x \in \widetilde{C}$.

• Par hypothèse, chaque morphisme $X_i' \xrightarrow{x \circ x_i'} X$, $i \in I$, satisfait la condition

pour un multi-recouvrement $X_\bullet^i$ de X_i' de type J_{ss}

indexé par un arbre bien ordonné $A^i = (\cdots \to A_n^i \xrightarrow{f_n^i} A_{n-1}^i \to \cdots \xrightarrow{f_1^i} A_0^i)$.

• Alors l'arbre $A = (\cdots \to A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{f_1} A_0)$ défini par

$$\begin{cases} A_0 & = & \{\bullet\} \\ A_n & = & \coprod\limits_{i \in I} A_{n-1}^i & \text{si } n \geq 1 \\ f_n & = & \coprod\limits_{i \in I} f_{n-1}^i & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

est bien ordonné.

• Il indexe un multi-recouvrement de X' de type J_{ss}
qui réalise la condition d'appartenance à $\widetilde{C}$ pour le morphisme $\quad x : X' \to X$.

Vérification de ce que le crible fermé ainsi défini est minimal :

- Considérons un crible J_{ss}-fermé C' sur X tel que $C' \supseteq C$.
- Il s'agit de prouver qu'alors $\widetilde{C}$ est contenu dans C'.
- Considérons un morphisme $x : X' \to X$ qui est dans $\widetilde{C}$.

Alors il satisfait la condition de définition de $\widetilde{C}$ relativement à un multi-recouvrement $X_\bullet$ de X' de type J_{ss} indexé par un arbre bien ordonné $A = (\cdots \to A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{f_1} A_0)$.

- Soit S le sous-ensemble des éléments (n, a_n) de A, définissant une branche $a_n, a_{n-1} = f_n(a_n), \cdots, a_1 = f_2(a_2), a_0 = f_1(a_1)$, tels que le morphisme composé

$$X_{n,a_n} \xrightarrow{x_{n,a_n}} X_{n-1,a_{n-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{1,a_1} \xrightarrow{x_{1,a_1}} X_{0,a_0} = X' \xrightarrow{x} X$$

n'est pas élément de C'.

- Il s'agit de démontrer que $S = \emptyset$.
- S'il n'était pas vide, il contiendrait un élément maximal (n, a_n).
- On conclut en se souvenant que

$$\begin{cases} - \quad \text{ou bien le morphisme composé} \\ \qquad\qquad X_{n,a_n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{0,a_0} = X' \xrightarrow{x} X \\ \quad\ \ \text{est élément de } C, \text{ donc de } C', \\ - \quad \text{ou bien la famille des morphismes} \\ \quad\ \ x_{n+1,a_{n+1}} : X_{n+1,a_{n+1}} \longrightarrow X_{n,a_n}, \quad a_{n+1} \in f_{n+1}^{-1}(a_n), \quad \text{est } J_{ss}\text{-couvrante.} \end{cases}$$

Stabilité de l'opération de fermeture des cribles :

On considère toujours une famille de crible $X \mapsto J(X)$, sa "stabilisation" J_s, et la "saturation" J_{ss} de J_s. Elles induisent une notion de "crible J_{ss}-fermé" et une opération de J_{ss}-fermeture des cribles $C \mapsto \overline{C}$.

Lemme. – *Pour tout morphisme $x : X' \to X$ de $\mathcal{C}$, l'application induite*

$$x^* : \Omega(X) \longrightarrow \Omega(X')$$

transforme les cribles J_{ss}-fermés sur X en cribles J_{ss}-fermés sur X'.

Corollaire (de ce lemme et du théorème précédent). –
Pour tout morphisme $x : X' \to X$ et tout crible C sur X, on a $\quad x^*(\overline{C}) = \overline{x^*(C)}$.

Démonstration :

- Le lemme implique $\overline{x^*(C)} \subseteq x^*(\overline{C})$.
- En sens inverse, considérons un élément $(X'' \xrightarrow{x'} X') \in x^*(\overline{C})$.

Alors $(x \circ x' : X'' \to X)$ est élément de $\overline{C}$ et il existe un multi-recouvrement $X_\bullet$ de X'' de type J_{ss} indexé par un arbre bien ordonné A tel que, pour tout élément maximal (n, a_n) de branche $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$, on a :

$$\begin{cases} - & \text{ou bien le morphisme composé} \\ & X_{n,a_n} \xrightarrow{x_{n,a_n}} X_{n-1,a_{n-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{1,a_1} \xrightarrow{x_{1,a_1}} X_{0,a_0} = X'' \xrightarrow{x'} X' \xrightarrow{x} X \\ & \text{est élément de } C, \\ - & \text{ou bien le crible vide sur } X_{n,a_n} \text{ est } J_{ss}\text{-couvrant.} \end{cases}$$

Une formule explicite pour l'engendrement des topologies :

Le théorème suivant explicite et améliore un peu
une formule d'Olivia Caramello (tirée du livre "Theories, Sites, Toposes")
fondée sur les "opérateurs gauche et droite de Joyal" :

Théorème. –
Soit une famille de cribles $X \mapsto J(X)$ sur une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$.
Soit sa stabilisation $X \mapsto J_s(X) = \bigcup_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \; \bigcup_{\substack{(X \xrightarrow{y} Y) \\ \in \mathrm{Hom}(X,Y)}} y^*(J(Y))$.
Soit sa saturation $X \mapsto J_{ss}(X) = \left\{ C \in \Omega(X) \,\middle|\, \begin{array}{l} C = \text{ crible maximal, ou} \\ \exists\, C' \in J_s(X)\,,\ C \supseteq C' \end{array} \right\}$.
Soit $C \mapsto \overline{C}$ l'opération qui associe à tout crible C sur un objet X
le plus petit crible J_{ss}-fermé $\overline{C}$ qui le contient.
Alors un crible C sur un objet X est couvrant pour la topologie $\overline{J}$ engendrée par J
si et seulement si $\overline{C} =$ crible maximal,
c'est-à-dire si le crible maximal sur X est l'unique crible J_{ss}-fermé qui contient C.

Pour la démonstration : Il faut vérifier que

- la famille des cribles C tels que $\overline{C}$ est le crible maximal est une topologie,
- cette famille contient J,
- toute topologie qui contient C contient cette famille.

Vérification de ce que la condition définit une topologie :

• Il faut vérifier que la famille des cribles C sur des objets X de $\mathcal{C}$ tels que $\quad \overline{C} =$ crible maximal
satisfait les trois axiomes de “maximalité”, “stabilité” et “transitivité”.

• Si C est le crible maximal sur un objet X, sa J_{ss}-fermeture $\overline{C}$ est le crible maximal puisque $C \subseteq \overline{C}$.

• Pour tout morphisme $x : X' \to X$ et tout crible C sur X, on a

$$\overline{x^*(C)} = \text{crible maximal} \qquad \text{si} \qquad \overline{C} = \text{crible maximal}$$

puisque $\overline{x^*(C)} = x^*(\overline{C})$.

• Considérons deux cribles C et C' sur un objet X tels que

$$\overline{C}' = \text{crible maximal}$$

et $\overline{x^*(C)} =$ crible maximal, pour tout $(X' \xrightarrow{x} X) \in C'$.
Comme $\overline{x^*(C)} = x^*(\overline{C})$, on en déduit que

$$x \in \overline{C}\,, \quad \forall\,(X' \xrightarrow{x} X) \in C'\,.$$

Autrement dit, on a

$$C' \subseteq \overline{C}\,.$$

Comme $\overline{C}'$ est le crible maximal,
on conclut que $\overline{C}$ est le crible maximal.

• Ainsi, la condition définit bien une topologie $\overline{J}$.

Vérification de ce que cette topologie est la topologie engendrée :

• On a $\overline{J} \supseteq J_{ss} \supseteq J_s \supseteq J$.

En effet, si $C \in J_{ss}(X)$, il existe une <u>famille</u> d'éléments de C

$$(x_i : X_i \longrightarrow X)\,,\ i \in I\,,$$

qui est J_{ss}-<u>couvrante</u>.

Il en résulte que <u>tout crible</u> J_{ss}-<u>fermé</u> qui contient C

contient aussi $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X$ donc est le <u>crible maximal</u>.

• Réciproquement, considérons une <u>topologie</u> J' qui <u>contient</u> J,

donc aussi J_s et J_{ss}.

Alors tout <u>crible</u> J'-<u>fermé</u> est a fortiori J_{ss}-<u>fermé</u>.

Si C est un crible sur un objet X qui est élément de $\overline{J}(X)$,

alors tout <u>crible</u> J'-<u>fermé</u> qui <u>contient</u> C est le <u>crible maximal</u>.

• Or, comme J' est une <u>topologie</u>,

pour tout <u>crible</u> C' sur un objet X, sa J'-<u>fermeture</u> est

$$\{X' \xrightarrow{x} X \mid \exists\, C'' \in J'(X'),\ x \circ x' \in C',\ \forall\,(X'' \xrightarrow{x'} X') \in C''\}.$$

• Donc un <u>crible</u> C sur X a pour J'-<u>fermeture</u> le <u>crible maximal</u>

si et seulement si

$$C \in J'(X)\,.$$

Une formule de caractérisation des cribles couvrants d'une topologie engendrée :

Les deux théorèmes précédents impliquent :

Corollaire. –
Soient une famille de cribles $X \mapsto J(X)$
sur une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$,
J_s *sa "stabilisation",* J_{ss} *la "saturation" de* J_s *et* $\overline{J}$ *la topologie engendrée par* J.
Alors un crible C *sur un objet* X *de* $\mathcal{C}$
est couvrant pour la topologie $\overline{J}$ *si et seulement si*
il existe un multi-recouvrement $X_\bullet$ *de* X *de type* J_{ss},
indexé par un arbre bien ordonné $A = (\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_1} A_0)$,
tel que :
pour tout élément maximal (n, a_n) *de* A
et sa branche $a_n, a_{n-1} = f_n(a_n), \cdots, a_0 = f_1(a_1)$,
on a

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{ou bien le morphisme composé} \\ \qquad X_{n,a_n} \xrightarrow{x_{n,a_n}} X_{n-1,a_{n-1}} \xrightarrow{x_{n-1,a_{n-1}}} \cdots \xrightarrow{x_{1,a_1}} X_{0,a_0} = X \\ \quad\ \text{est élément du crible } C, \\ \bullet \quad \text{ou bien l'objet } X_{n,a_n} \text{ admet le crible vide pour } J_{ss}\text{-recouvrement}. \end{cases}$$

Application à la topologie engendrée par une famille de topologies :

Si les J_i, $i \in I$, sont une famille de topologies sur $\mathcal{C}$,
la famille de cribles

$$X \longmapsto \bigcup_{i \in I} J_i(X)$$

est “stable” et “saturée”.

On déduit de cette remarque :

Corollaire. –
Soit une famille de topologies J_i, $i \in I$,
sur une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$.
Soit

$$J = \bigvee_{i \in I} J_i$$

la plus petite topologie qui contient toutes les J_i, $i \in I$.
Alors un crible C sur un objet X de $\mathcal{C}$
est couvrant pour la topologie J
si et seulement si
le crible maximal est l'unique crible sur X
qui contient C
et qui est J_i-fermé pour tout $i \in I$.

Application à la construction de produits de topos :

• Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux catégories essentiellement petites,

toute topologie J sur $\mathcal{C}$ définit une topologie sur $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, également notée J,

pour laquelle un crible C sur un objet $X \times Y$ est couvrant

si et seulement si il contient une famille de morphismes de la forme

$$X_i \times Y \xrightarrow{x_i \times \mathrm{id}_Y} X \times Y \,, \quad i \in I \,,$$

pour une famille J-couvrante de morphismes $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$.

Corollaire. – *Soient des sites $(\mathcal{C}_1, J_1), \cdots, (\mathcal{C}_n, J_n)$.*
Alors le topos produit

$$\widehat{(\mathcal{C}_1)}_{J_1} \times \cdots \times \widehat{(\mathcal{C}_n)}_{J_n}$$

peut être construit comme le topos

$$\widehat{(\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n)}_{J_1 \times \cdots \times J_n}$$

des faisceaux sur la catégorie produit $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$
munie de la "topologie produit" $J_1 \times \cdots \times J_n$
pour laquelle un crible C sur un objet $X_1 \times \cdots \times X_n$
et couvrant si et seulement si le crible maximal sur $X_1 \times \cdots \times X_n$ est le seul crible
qui contienne C et qui soit J_i-fermé pour tout i, $1 \leq i \leq n$.

Produits de topos et produits d'espaces topologiques :

• A tout espace topologique X sont associés la catégorie $O(X)$ de ses ouverts

munie de la topologie J_X des recouvrements d'ouverts

et donc le topos $\mathcal{E}_X = \widehat{O(X)}_{J_X}$ des faisceaux sur X.

• Le corollaire précédent donne une "caractérisation sans points"

de la topologie d'un espace topologique produit

lorsque s'applique la proposition suivante :

Proposition. – *Soient des espaces topologiques $X_1, \cdots, X_n$.*
Pour que le morphisme canonique de topos

$$\mathcal{E}_{X_1 \times \cdots \times X_n} \longrightarrow \mathcal{E}_{X_1} \times \cdots \times \mathcal{E}_{X_n}$$

soit une équivalence, il suffit que tous les facteurs X_i, $1 \leq i \leq n$, sauf un au plus soient des espaces topologiques localement compacts.

Remarque : Ici, un espace topologique X est dit "localement compact"

si, pour tout élément x d'un ouvert U de X,

il existe un ouvert $V \ni x$ dont l'adhérence $\overline{V}$ est contenue dans U

et est compacte (au sens que tout recouvrement ouvert de $\overline{V}$ contient un sous-recouvrement fini).