Correspondances galoisiennes, engendrement de topologies de Grothendieck et images réciproques de sous-topos

par Olivia Caramello

(Istituto Grothendieck, Università di Insubria, Université Paris-Saclay)

et Laurent Lafforgue

(Centre Lagrange, centre de recherche de Huawei à Boulogne)

Centre Lagrange, vendredi 31 mai 2024

Une propriété générale des paires de foncteurs adjoints :

Proposition. – *Considérons une paire de foncteurs adjoints*

$$(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}\,,\ \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C})$$

entre deux catégories localement petites.
Soit $\mathcal{C}'$ [resp. $\mathcal{D}'$] la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ [resp. $\mathcal{D}$] sur les objets X [resp. Y] tels que le morphisme d'adjonction

$$X \longrightarrow G \circ F(X) \qquad \text{[resp. } F \circ G(Y) \longrightarrow Y\text{]}$$

est un isomorphisme.
Alors F et G induisent deux équivalences réciproques

$$\mathcal{C}' \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}'\ .$$

Démonstration :

Si $X \to G \circ F(X)$ est un isomorphisme et $Y = F(X)$,

alors $Y \to (F \circ G)(Y)$ est un isomorphisme

donc aussi $(F \circ G)(Y) \to Y$ puisque le composé

$F(X) \to F \circ G \circ F(X) \to F(X)$ est $\mathrm{Id}_{F(X)}$.

La paire de foncteurs adjoints associée à une relation :

Lemme. – *Considérons n'importe quelle relation*

$$R \hookrightarrow T \times S$$

entre deux ensembles ou plus généralement deux classes T et S.
Alors R définit une paire de foncteurs adjoints

$$(\mathcal{P}(T), \subseteq) \underset{G_R}{\overset{F_R}{\rightleftarrows}} (\mathcal{P}(S), \supseteq)$$

entre les ensembles ou classes ordonnés
des parties ou des sous-classes de S et T, par

$$F_R(J) = \{s \in S \mid (t,s) \in R, \ \forall\, t \in J\} \quad \textit{pour toute } J \subseteq T,$$
$$G_R(I) = \{t \in T \mid (t,s) \in R, \ \forall\, s \in I\} \quad \textit{pour toute } I \subseteq S.$$

Démonstration :

En effet, on a les équivalences

$$\begin{array}{ll} & F_R(J) \supseteq I \\ \Leftrightarrow & (t,s) \in R, \ \forall\, t \in J, \ \forall s \in I \\ \Leftrightarrow & J \subseteq G_R(I). \end{array}$$

Equivalences et engendrements induits par une relation :

Corollaire. – *Considérons une relation* $\quad R \hookrightarrow T \times S$
et la paire de foncteurs adjoints induite

$$(\mathcal{P}(T), \subseteq) \underset{G_R}{\overset{F_R}{\rightleftarrows}} (\mathcal{P}(S), \supseteq) \; .$$

Alors :
(i) Les deux foncteurs F_R *et* G_R *induisent deux bijections réciproques*

$$\{J \subseteq T \mid G_R \circ F_R(J) = J\} \underset{=}{\overset{=}{\rightleftarrows}} \{I \subseteq S \mid F_R \circ G_R(I) = I\} \; .$$

(ii) Pour $J \subseteq T$ *[resp.* $I \subseteq S$*], on a*

$$G_R \circ F_R(J) = J \qquad [\text{resp.} \quad F_R \circ G_R(I) = I]$$

si et seulement si il existe $I \subseteq S$ *[resp.* $J \subseteq T$*] telle que*

$$J = G_R(I) \qquad [\text{resp.} \quad I = F_R(J)].$$

(iii) Pour toute $J \subseteq T$ *[resp.* $I \subseteq S$*],*

$$G_R \circ F_R(J) \qquad [\text{resp.} \quad F_R \circ G_R(I)]$$

est le plus petit élément de $\mathrm{Im}(G_R)$ *[resp. de* $\mathrm{Im}(F_R)$*]*
qui contient J *[resp.* I*].*

Démonstration de (ii): Si $J = G_R(I)$, on a

$$G_R(I) \subseteq (G_R \circ F_R) \circ G_R(I) = G_R \circ (F_R \circ G_R)(I) \subseteq G_R(I).$$

Dualité des cribles et des préfaisceaux :

Définition. –
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite, munie du foncteur de Yoneda

$$y : \mathcal{C} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}\,.$$

Soit S la classe des paires (X, C) constituée de

$$\begin{cases} X & = & \text{objet de } \mathcal{C}, \\ C & = & \text{crible de } X = \text{sous-préfaisceau de } y(X). \end{cases}$$

Soit T la classe des préfaisceaux P sur $\mathcal{C}$.
On appellera "dualité des cribles et des préfaisceaux" la relation

$$R \hookrightarrow S \times T$$

constituée des paires d'éléments

$$(C \hookrightarrow y(X), P)$$

telles que, pour tout morphisme $X' \xrightarrow{x} X$ de $\mathcal{C}$, l'application de restriction

$$P(X') = \mathrm{Hom}(y(X'), P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C \times_{y(X)} y(X'), P)$$

est une bijection.

Cette relation induit deux foncteurs adjoints

$$(\mathcal{P}(S), \subseteq) \underset{G_R}{\overset{F_R}{\rightleftarrows}} (\mathcal{P}(T), \supseteq)\ .$$

La dualité induite des topologies et des sous-topos :

Théorème. –
(i) Une partie J de

$$S = \{\text{cribles } C \text{ des objets } X \text{ de } \mathcal{C}\}$$

est un point fixe de la dualité de S avec

$$T = \{\text{classe des préfaisceaux } P \text{ sur } \mathcal{C}\}$$

si et seulement si J est une topologie de Grothendieck.
(ii) Une partie I de T
est un point fixe de la dualité de T avec S
si et seulement si I est la classe des objets d'un sous-topos de $\widehat{\mathcal{C}}$.

Corollaire. –
(i) Il y a correspondance bijective entre
les topologies de Grothendieck J sur $\mathcal{C}$
et les sous-topos de $\widehat{\mathcal{C}}$.
(ii) Pour toute famille J de cribles,
$G_R \circ F_R(J)$ *est la topologie engendrée par J.*
(iii) Pour toute classe I de préfaisceaux sur $\mathcal{C}$,
$F_R \circ G_R(I)$ *est le plus petit sous-topos de* $\widehat{\mathcal{C}}$ *qui contient I.*

Toute classe de préfaisceaux définit une topologie de Grothendieck :

• Considérons une classe I de préfaisceaux P.

Il faut vérifier que la classe J des cribles C d'objets X de $\mathcal{C}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout morphisme } x : X' \to X \text{ et tout } P \in I, \\ \text{l'application de restriction est une bijection} \\ \qquad P(X') = \mathrm{Hom}(y(X'), P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(C \times_{y(X)} y(X'), P), \end{array} \right.$$

est une topologie.

• Toute intersection de topologies est une topologie,

donc il suffit de vérifier le cas où I est réduite à un élément P.

• La relation est satisfaite par les cribles maximaux $C = y(X)$.

• Par définition de la relation, elle est stable par les changements de base $x : X' \to X$.

• Considérons deux cribles $C \hookrightarrow y(X)$ et $C' \hookrightarrow y(X)$ tels que $C' \in J$ et

$x^* C \in J$, $\forall\, (X' \xrightarrow{x} X) \in C'$. Ces conditions étant stables par changement de base,

on est réduit à considérer un morphisme $C \to P$. Pour tout $(X' \xrightarrow{x} X) \in C'$, le composé

$$x^* C = C \times_{y(X)} y(X') \to C \to P \text{ se relève en } y(X') \to P.$$

Cela définit un morphisme $C' \to P$ qui se relève en $y(X) \to P$.

Le composé $C \hookrightarrow y(X) \to P$ et le morphisme $C \to P$

coïncident car ils coïncident sur $C \times_{y(X)} C'$.

Toute classe de cribles définit un sous-topos :

• Si J est une classe de cribles $(C \hookrightarrow y(X))$, la classe de préfaisceaux $F_R(J)$ qui est associée à J est la même que celle associée à $G_R \circ F_R(J)$.

• On peut donc supposer que J est une topologie.

• Alors $F_R(J)$ est la classe des faisceaux pour la topologie J.

• On sait que la sous-catégorie pleine $\widehat{\mathcal{C}}_J$ associée est un sous-topos de $\widehat{\mathcal{C}}$ au sens suivant :

Définition. – *Un sous-topos de $\widehat{\mathcal{C}}$ est une sous-catégorie pleine $\mathcal{E}$ telle que :*
(i) Le foncteur de plongement $j_* : \mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{C}}$ a un adjoint à gauche j^*.
(ii) Le foncteur $j^* : \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{E}$ respecte les limites finies.
(iii) Un objet P de $\widehat{\mathcal{C}}$ est dans $\mathcal{E}$ si et seulement si

$$P \longrightarrow j_* \circ j^* P \quad \textit{est un isomorphisme.}$$

• Si $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{C}}_J$ est le sous-topos de $\widehat{\mathcal{C}}$ défini par une topologie J, alors J est l'ensemble des cribles $C \hookrightarrow y(X)$ tels que

$$j^* C \longrightarrow j^* y(X) \quad \text{soit un isomorphisme,}$$

c'est-à-dire tels que, pour tout J-faisceau E, on ait une bijection

$$\mathrm{Hom}(y(X), E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(C, E)\,.$$

• Ainsi, les topologies sont les points fixes de $\mathcal{P}(S)$.

Les sous-topos sont les points fixes de la relation de dualité :

- On considère un sous-topos de $\widehat{\mathcal{C}}$ $\quad (\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \mathcal{E}\,,\ \mathcal{E} \xhookrightarrow{j_*} \widehat{\mathcal{C}})$.
- Pour tout crible $C \hookrightarrow y(X)$, demander que

$$\mathrm{Hom}(y(X), j_* F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(C, j_* E) \quad \text{pour tout objet } E \text{ de } \mathcal{E}$$

équivaut à demander que $\quad j^* C \xrightarrow{\sim} j^* y(X)$,
et cette condition est stable par les changements de base $X' \xrightarrow{x} X$.

- Cela définit une topologie J.
- Il faut montrer que, réciproquement, tout J-faisceau E est un objet de $\mathcal{E}$ c'est-à-dire vérifie $\quad E \xrightarrow{\sim} j_* \circ j^* E$.
- Considérons le plongement diagonal $\quad E \hookrightarrow E \times_{j_* \circ j^* E} E$.

Pour tout morphisme $y(X) \to E \times_{j_* \circ j^* E} E$,
l'image réciproque de la diagonale est un crible $\quad C \hookrightarrow y(X) \quad$ élément de J.
Donc le morphisme $C \to E$ se relève en $y(X) \to E$.

- Ainsi, le morphisme $\quad E \to j_* \circ j^* E \quad$ est un plongement.

Son image réciproque par tout morphisme $\quad y(X) \to j_* \circ j^* E$
est un crible $\quad C \hookrightarrow y(X) \quad$ élément de J.

- Donc le morphisme $C \to E$ se relève en $y(X) \to E$ et

$$E \longrightarrow j_* \circ j^* E \quad \text{est un isomorphisme.}$$

Dualité des monomorphismes et des objets d'un topos :

Définition. –
Soit $\mathcal{E}$ un topos.
Soit S la classe des monomorphismes de $\mathcal{E}$

$$C \hookrightarrow X\,.$$

Soit T la classe des objets E de $\mathcal{E}$.
On appellera "dualité des monomorphismes et des objets" de $\mathcal{E}$ la relation

$$R \hookrightarrow S \times T$$

constituée des paires d'éléments

$$(C \hookrightarrow X, E)$$

telles que, pour tout morphisme $X' \to X$,
l'application de restriction

$$\mathrm{Hom}(X', E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C \times_X X', E)$$

est une bijection.

Cette relation induit deux foncteurs adjoints

$$(\mathcal{P}(T), \subseteq) \underset{G_R}{\overset{F_R}{\rightleftarrows}} (\mathcal{P}(S), \supseteq).$$

Topologies et sous-topos comme points fixes :

Proposition. – *Une partie J de* $S = \{$*monomorphismes* $C \hookrightarrow X$ *de* $\mathcal{E}\}$
est un point fixe de la dualité de S *avec* $T = \{$*objets* E *de* $\mathcal{E}\}$
si et seulement si c'est une topologie de $\mathcal{E}$ *au sens que :*

$$\begin{cases} (1) & \text{Tout isomorphisme } C \xrightarrow{\sim} X \text{ est élément de } J. \\ (2) & \text{Pour tout élément } C \hookrightarrow X \text{ de } J \text{ et tout morphisme } X' \to X, \\ & C \times_X X' \hookrightarrow X' \text{ est élément de } J. \\ (3) & \text{Un monomorphisme } C \hookrightarrow X \text{ est dans } J \\ & \text{s'il existe } (C' \hookrightarrow X) \in J \text{ et une famille épimorphique } (X_k \to C')_{k \in K} \\ & \text{telle que chaque } C \times_X X_k \hookrightarrow X_k,\ k \in K, \text{ est dans } J. \end{cases}$$

Proposition. – *Une partie I de* $T = \{$*objets* E *de* $\mathcal{E}\}$
est un point fixe de la dualité de T *avec* S
si et seulement si la sous-catégorie pleine $\mathcal{E}_I$ *de* $\mathcal{E}$ *sur les objets de* I
est un sous-topos au sens que :

$$\begin{cases} (1) & \text{Le foncteur de plongement } j_* : \mathcal{E}_I \hookrightarrow \mathcal{E} \text{ a un adjoint à gauche } j^*. \\ (2) & \text{Le foncteur } j^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_I \text{ respecte les limites finies.} \\ (3) & \text{Un objet } E \text{ de } \mathcal{E} \text{ est élément de } I \text{ si et seulement si} \\ & E \longrightarrow j_* \circ j^* E \quad \text{est un isomorphisme.} \end{cases}$$

La dualité induite des topologies et des sous-topos :

On considère toujours la relation de dualité R entre

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{\text{monomorphismes } C \hookrightarrow X \text{ du topos } \mathcal{E}\} \\ \text{et} \quad T & = & \{\text{objets } E \text{ de } \mathcal{E}\}, \end{array}$$

avec les deux foncteurs adjoints induits :

$$(\mathcal{P}(S), \subseteq) \underset{G_R}{\overset{F_R}{\rightleftarrows}} (\mathcal{P}(T), \supseteq)$$

Corollaire. –
(i) Il y a correspondance bijective entre
les topologies J sur le topos $\mathcal{E}$,

et les sous-topos $(\mathcal{E} \xrightarrow{j^*} \mathcal{E}', \mathcal{E}' \xhookrightarrow{j_*} \mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$.
(ii) Pour toute famille J de monomorphismes $C \hookrightarrow X$ de $\mathcal{E}$,
$G_R \circ F_R(J)$ est la plus petite topologie de $\mathcal{E}$ qui contient J.
(iii) Pour toute famille I d'objets E de $\mathcal{E}$,
$F_R \circ G_R(I)$ est le plus petit sous-topos de $\mathcal{E}$
qui contient comme objets les éléments de I.

Dualité des cribles et des monomorphismes de préfaisceaux :

Définition. –
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite, munie de $y : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$.
Soit S la classe des cribles $C \hookrightarrow y(X)$ des objets X de $\mathcal{C}$.
Soit T la classe des monomorphismes de préfaisceaux sur $\mathcal{C}$

$$Q \hookrightarrow P\,.$$

On appellera "dualité des cribles et des sous-préfaisceaux" la relation

$$R \hookrightarrow S \times T$$

constituée des paires d'éléments

$$(C \hookrightarrow y(X), Q \hookrightarrow P)$$

telles que

$$\begin{cases} \text{pour tout morphisme } X' \xrightarrow{x} X \text{ et tout élément } p \in P(X'), \\ \text{on a} \qquad p \in Q(X') \\ \text{si } x'^*(p) \in Q(X''), \forall\, (X'' \xrightarrow{x'} X') \in x^* C. \end{cases}$$

Cette relation induit deux foncteurs adjoints

$$(\mathcal{P}(S), \subseteq) \underset{G_R}{\overset{F_R}{\rightleftarrows}} (\mathcal{P}(T), \supseteq).$$

Topologies et propriétés de fermeture comme points fixes :

Théorème. –

(i) Une partie J de $S = \{\text{cribles } C \hookrightarrow y(X)\}$ est un point fixe de la dualité de S avec

$$T = \{\text{monomorphismes } Q \hookrightarrow P \text{ de } \widehat{\mathcal{C}}\}$$

si et seulement si J est une topologie de Grothendieck.

(ii) Une partie I de T est un point fixe de la dualité de T avec S si et seulement si I est une "propriété de fermeture" au sens que :

- *Les isomorphismes $Q \xrightarrow{\sim} P$ sont éléments de I.*
- *Les morphismes $P' \to P$ transforment les sous-préfaisceaux $Q \hookrightarrow P$ qui sont dans I en sous-préfaisceaux $Q \times_P P' \hookrightarrow P'$ qui sont dans I.*
- *Pour toute famille de sous-préfaisceaux*
$$Q_k \hookrightarrow P\,,\ k \in K\,,\ \text{qui sont dans } I,$$
leur intersection $\bigcap\limits_{k \in K} Q_k \hookrightarrow P$ est encore dans I.
- *Si l'on note $\overline{Q} \hookrightarrow P$ le plus petit élément de I qui contient un sous-préfaisceau $Q \hookrightarrow P$, on a pour tout morphisme $P' \to P$ $\quad \overline{P' \times_P Q} = P' \times_P \overline{Q}\,.$*

La dualité induite des topologies et des propriétés de fermeture :

On considère toujours la relation de dualité R entre

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{\text{cribles } C \hookrightarrow y(X) \text{ des objets } X \text{ de } \mathcal{C}\} \\ \text{et} \quad T & = & \{\text{monomorphismes } Q \hookrightarrow P \text{ de } \widehat{\mathcal{C}}\} \end{array}$$

avec les deux foncteurs adjoints induits

$$(\mathcal{P}(S), \subseteq) \underset{G_R}{\overset{F_R}{\rightleftarrows}} (\mathcal{P}(T), \supseteq).$$

Corollaire. –
(i) Il y a correspondance bijective entre les topologies J sur la catégorie $\mathcal{C}$ et les "propriétés de fermeture" des sous-préfaisceaux $Q \hookrightarrow P$.
(ii) Pour toute famille J de cribles $C \hookrightarrow y(X)$ d'objets X de $\mathcal{C}$,
$G_R \circ F_R(J)$ est la plus petite topologie $\overline{J}$ qui contient J.
De plus, $F_R(J) = F_R(\overline{J})$ est une "propriété de fermeture" :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{elle est vérifiée par tous les isomorphismes } Q \xrightarrow{\sim} P, \\ \text{elle est respectée par les changements de base et les intersections,} \\ \text{elle vérifie} \qquad \overline{P' \times_P Q} = \overline{P}' \times_P Q \text{ pour tous } Q \hookrightarrow P \text{ et } P' \to P. \end{array} \right.$$

(iii) Pour toute famille I de monomorphismes $Q \hookrightarrow P$ de $\widehat{\mathcal{C}}$,
$F_R \circ G_R(I)$ est la plus petite "propriété de fermeture" $\overline{I}$ qui contient I.
De plus, I et $\overline{I}$ définissent la même topologie $G_R(I) = G_R(\overline{I})$.

Toute classe de monomorphismes de préfaisceaux définit une topologie :

• Considérons une classe I de monomorphismes de préfaisceaux $Q \hookrightarrow P$.
Il faut vérifier que la classe J des cribles C d'objets X de $\mathcal{C}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} \text{pour tout morphisme } X' \xrightarrow{x} X \text{ et tout } p \in P(X'), \\ \text{on a } p \in Q(X') \text{ si } x'^*(p) \in Q(X''), \forall\,(X'' \xrightarrow{x'} X') \in x^*C, \end{array}\right.$$

est une topologie.

• Toute intersection de topologies est une topologie,
donc il suffit de vérifier le cas où I est réduite à un élément $Q \hookrightarrow P$.

• La relation est satisfaite par les cribles maximaux $C = y(X)$.

• Par définition de la relation, elle est stable par les changements de base $x : X' \to X$.

• Considérons deux cribles $C \hookrightarrow y(X)$ et $C' \hookrightarrow y(X)$
tels que $C' \in J$ et $x^*C \in J$, $\forall\,(X' \xrightarrow{x} X) \in C'$.
Ces conditions étant stables par changement de base,
on est réduit à considérer un élément $p \in P(X)$
tel que $x'^*(p) \in Q(X')$, $\forall\,(X' \xrightarrow{x} X) \in C$.
Pour tout $(X' \xrightarrow{x} X) \in C'$, on a $\quad x^*C \in J \quad$ et

$x'^* \circ x^*(p) \in Q(X'')\,,\ \forall\,(X'' \xrightarrow{x'} X') \in x^*C,\qquad$ d'où $\qquad x^*(p) \in Q(X')$.

Comme $C' \in J$, on conclut que $p \in Q(X)$ ce qui signifie comme voulu que $C \in J$.

Toute classe de cribles définit une “propriété de fermeture” :

- Considérons une classe J de cribles et son image

$$I = F_R(J) = \left\{ Q \hookrightarrow P \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\,(C \hookrightarrow y(X)) \in J\,,\ \forall\,(X' \to X)\,, \\ \forall\, p \in P(X'),\ \text{on a } p \in Q(X') \\ \text{si } x'^*(p) \in Q(X'')\,,\ \forall\,(X'' \xrightarrow{x'} X') \in x^* C \end{array} \right\}.$$

- Il est évident sur cette définition que

$$\left\{ \begin{array}{l} I \text{ comprend les isomorphismes,} \\ I \text{ est respectée par les changements de base } P' \to P, \\ I \text{ est respectée par les intersections d'éléments } Q_k \hookrightarrow P,\ k \in K. \end{array} \right.$$

- On sait déjà que $G_R \circ F_R(J) = \overline{J}$ est une topologie.

Il en résulte que, pout tout sous-préfaisceau $Q \hookrightarrow P$,

le plus petit élément de I qui le contient $\quad \overline{Q} \longhookrightarrow P$

est donné par la formule en tout objet X de $\mathcal{C}$

$$\overline{Q}(X) = \{p \in P(X) \mid \exists\, C \in \overline{J}(X)\,,\ x^*(p) \in Q(X')\,,\ \forall\,(X' \xrightarrow{x} X) \in C\}.$$

- Cette formule implique comme voulu que, pour tout morphisme $P' \to P$, on a

$$\overline{Q \times_P P'} = \overline{Q} \times_P P'\,.$$

Les topologies et les “propriétés de fermeture” sont des points fixes :

• Considérons une topologie J et la “propriété de fermeture” associée $I = F_R(J)$.
Celle-ci définit une opération de fermeture des sous-préfaisceaux

$$(Q \hookrightarrow P) \longmapsto (\overline{Q} \hookrightarrow P)$$

où, pour tout objet X de $\mathcal{C}$,

$$\overline{Q}(X) = \{p \in P(X) \mid \exists\, C \in J(X)\,,\ x^*(p) \in Q(X')\,,\ \forall\,(X' \xrightarrow{x} X) \in C\}.$$

Si $C \hookrightarrow y(X)$ est un crible élément de $G_R \circ F_R(J)$,
on a pour tout $Q \hookrightarrow P$ et tout $y(X) \xrightarrow{p} P$ l'implication

$$C \subseteq Q \times_P y(X) \quad \Rightarrow \quad \overline{Q} \times_P y(X) = y(X)\,.$$

Cela signifie que $\quad \overline{C} = y(X) \quad$ c'est-à-dire $\quad C \in J$.
Ainsi $\qquad J = G_R \circ F_R(J)$.

• Considérons une “propriété de fermeture” I et la topologie associée $J = G_R(I)$.

Un crible $C \hookrightarrow y(X)$ d'un objet X est élément de J
si et seulement si, pour tout morphisme $X' \xrightarrow{x} X$
et tout $Q \hookrightarrow y(X')$ qui est élément de I, on a l'implication

$$x^* C \subseteq Q \quad \Rightarrow \quad Q = y(X').$$

Cela signifie que

$$C \in J \quad \text{si et seulement si} \quad \overline{C} = y(X).$$

Il en résulte comme voulu que

$$I = F_R \circ G_R(I)\,.$$

Compatibilité des réunions avec les images réciproques de sous-topos :

• Tout morphisme de topos $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$

induit une application d'image réciproque des sous-topos

$$\begin{array}{rcccl} f^* = f^{-1} & : & \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}\} & \longrightarrow & \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}'\} \\ & & (\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}) & \longmapsto & (\mathcal{E}_1 \times_{\mathcal{E}} \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}'). \end{array}$$

• L'application $f^* = f^{-1}$ respecte les intersections arbitraires.

Les ensembles de sous-topos étant munis de la relation d'ordre $\supseteq$,

elle admet un adjoint à droite

$$f_* : (\mathcal{E}'_1 \hookrightarrow \mathcal{E}') \longmapsto \mathrm{Im}(\mathcal{E}'_1 \hookrightarrow \mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}).$$

Théorème. – *Pour tout morphisme de topos $f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$, on a:*
(i) L'application induite

$$f^* = f^{-1} : \{\textit{sous-topos de } \mathcal{E}\} \to \{\textit{sous-topos de } \mathcal{E}'\}$$

respecte aussi les réunions finies de sous-topos.
(ii) Si f est un morphisme "localement connexe",
alors l'application induite $f^* = f^{-1}$ d'image réciproque des sous-topos
respecte même les réunions arbitraires de sous-topos
et admet un adjoint à gauche $f_! : \{\textit{sous-topos de } \mathcal{E}'\} \to \{\textit{sous-topos de } \mathcal{E}\}$.

Rappel sur les morphismes localement connexes :

Définition. –
(i) Un morphisme de topos $\quad f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$
est dit "essentiel" si

$f^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ *admet aussi un adjoint à gauche* $\quad f_! : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$.

(ii) Un morphisme essentiel de topos

$$f = (f_!, f^*, f_*) : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$

est dit "localement connexe" si,
après tout changement de base $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}$,
on a encore un morphisme essentiel

$$g = (g_!, g^*, g_*) : \mathcal{E}_1' = \mathcal{E}' \times_{\mathcal{E}} \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_1$$

et que les deux carrés adjoints

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_1' \arrow[d, "g_!"'] & \mathcal{E}' \arrow[l, "e'^*"'] \arrow[d, "f_!"] \\ \mathcal{E}_1 & \mathcal{E} \arrow[l, "e^*"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E}_1' \arrow[r, "e'_*"] & \mathcal{E}' \\ \mathcal{E}_1 \arrow[u, "g^*"] \arrow[r, "e_*"] & \mathcal{E} \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

La compatibilité des réunions finies avec les images réciproques :

La partie (i) du théorème précédent résulte de la partie (ii) et des trois résultats suivants :

Lemme. – *Dans un topos $\mathcal{E}$, l'application d'intersection $\wedge$ avec un sous-topos $\mathcal{E}'$*

$$\mathcal{E}_1 \longmapsto \mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}'$$

respecte les réunions finies $\vee$ de sous-topos.

Proposition. – *Tout morphisme de topos $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ se factorise en*

$$\mathcal{E}' \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}'_{J'} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \qquad \text{où}$$

- *$\mathcal{E}' \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}'_{J'}$ est un plongement de topos,*
- *$\widehat{\mathcal{C}}'_{J'} \to \widehat{\mathcal{C}}_J$ est induit par une fibration $\mathcal{C}' \xrightarrow{p} \mathcal{C}$,*
- *$J' = p^*(J)$ est la "topologie de Giraud" induite par J de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.*

Théorème. – *Si $\mathcal{C}' \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ est une fibration et $J' = p^*(J)$ est une "topologie de Giraud", le morphisme de topos induit*

$$p : \widehat{\mathcal{C}}'_{J'} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$$

est "localement connexe".

Interversion formelle des réunions et des intersections :

Le lemme de la page précédente est conséquence

du lemme général suivant :

Lemme. –

Soit $(E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné

où l'inf $\wedge$ et le sup $\vee$ des familles finies d'éléments

sont toujours bien définis.

Si la formule

$$e \vee (e_1 \wedge e_2) = (e \vee e_1) \wedge (e \vee e_2)$$

est toujours vérifiée, il en va de même de la formule

$$e \wedge (e_1 \vee e_2) = (e \wedge e_1) \vee (e \wedge e_2).$$

Démonstration.–

On a en effet

$$\begin{aligned}(e \wedge e_1) \vee (e \wedge e_2) &= (e \vee e) \wedge (e_1 \vee e) \wedge (e \vee e_2) \wedge (e_1 \vee e_2) \\ &= e \wedge (e_1 \vee e_2)\,.\end{aligned}$$

Rappel sur les fibrations :

Définition. – *Soit $p : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ un foncteur.*

(i) Un morphisme $X_1 \xrightarrow{x} X_2$ de $\mathcal{C}'$ est dit "p-cartésien"

si, pour tout morphisme $X \xrightarrow{x_2} X_2$
et tout morphisme $y_1 : p(X) \to p(X_1)$ tel que $p(x_2) = p(x) \circ y_1$,
il existe un unique morphisme $x_1 : X' \to X_1$ tel que $\quad x_2 = x \circ x_1 \quad$ et $\quad p(x_1) = y_1$.
(ii) Le foncteur $p : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ est appelé une "fibration"
si, pour tout objet X_1 de $\mathcal{C}'$ et tout morphisme $Y \xrightarrow{y_1} p(X_1)$ de $\mathcal{C}$,
il existe un morphisme p-cartésien $X \xrightarrow{x_1} X_1$ de $\mathcal{C}'$
et un isomorphime $p(X) \xrightarrow[\sim]{y} Y$ tels que $p(x_1) = y_1 \circ y$.

Proposition. – *Soit $p : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ une fibration de catégories essentiellement petites.*
Alors, pour tout foncteur $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ d'une catégorie essentiellement petite $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{C}$,
le foncteur induit $\mathcal{C}' \times_{\mathcal{C}} \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ est encore une fibration, et le carré de topos

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{C}' \times_{\mathcal{C}} \mathcal{D}} \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & \widehat{\mathcal{C}}' \arrow[d, "p"] \\
\widehat{\mathcal{D}} \arrow[r] & \widehat{\mathcal{C}}
\end{tikzcd}$$

est cartésien.

Rappel sur les topologies de Giraud :

Proposition. –
Soit une fibration de catégories essentiellement petites
$$p : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C} .$$
Soit le morphisme essentiel qu'il définit
$$p = (p_!, p^*, p_*) : \widehat{\mathcal{C}}' \longrightarrow \mathcal{C} \quad .$$
Alors, pour tout sous-topos
$$\widehat{\mathcal{C}}_J \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}} \quad ,$$
son image réciproque par p
$$\widehat{\mathcal{C}}'_{J'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}'$$
est définie par la "topologie de Giraud" J' sur $\mathcal{C}'$ pour laquelle

$$\left\{\begin{array}{l} \text{un crible } C \hookrightarrow y(X) \text{ est couvrant} \\ \text{si et seulement si les images par } p \\ \qquad\qquad p(x) : p(X') \longrightarrow p(X) \\ \text{des morphismes } p\text{-cartésiens que contient } C \\ \qquad\qquad x : X' \longrightarrow X \\ \text{forment une famille } J\text{-couvrante de l'objet } p(X) \text{ de } \mathcal{C}. \end{array}\right.$$

Fibrations et morphismes localement connexes :

Corollaire. – *Soit une fibration de catégories essentiellement petites*

$$p : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}\,.$$

Alors :

(i) L'application qui associe à toute topologie J de $\mathcal{C}$ la "topologie de Giraud" induite J' de $\mathcal{C}'$ respecte les intersections arbitraires. Autrement dit, l'application p^{-1} d'image réciproque des sous-topos par

$$p = (p_!, p^*, p_*) : \widehat{\mathcal{C}'} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$$

respecte les réunions arbitraires de sous-topos.

(ii) Pour toute topologie J de $\mathcal{C}$ et son induite J' sur $\mathcal{C}'$, le foncteur de composition avec $p : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$

$$p^* : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}'}$$

transforme les J-faisceaux en J'-faisceaux et respecte les limites arbitraires. Autrement dit, on a deux carrés commutatifs adjoints :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{C}'}_{J'} \arrow[r, hook, "j'_*"] & \widehat{\mathcal{C}'} \\
\widehat{\mathcal{C}}_J \arrow[u, "p^*"] \arrow[r, hook, "j_*"] & \widehat{\mathcal{C}} \arrow[u, "p^*"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{C}'}_{J'} \arrow[d, "p_!"'] & \widehat{\mathcal{C}'} \arrow[l, "j'^*"'] \arrow[d, "p_!"] \\
\widehat{\mathcal{C}}_J & \widehat{\mathcal{C}} \arrow[l, "j^*"]
\end{tikzcd}$$

Factorisation des morphismes de topos :

- Considérons un morphisme de topos $\mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}$.
- On peut écrire $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sous la forme

$$\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{C}}_J \quad , \quad \mathcal{E}' = \widehat{\mathcal{D}}_K$$

où $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{E}$, $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{E}'$ sont deux petites sous-catégories pleines telles que $f^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ induise un foncteur $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Théorème. – *Soit $\mathcal{C}' = \mathcal{D}/\mathcal{C}$ la catégorie dont*

- *les objets sont les triplets $(E', E, E' \xrightarrow{e} \rho(E))$ constitués d'objets E' et E de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ et d'un morphisme e de $\mathcal{D}$,*
- *les morphismes $(E_1', E_1, E_1' \xrightarrow{e_1} \rho(E_1)) \to (E_2', E_2, E_2' \xrightarrow{e_2} \rho(E_2))$ sont les paires de morphismes compatibles $(E_1' \xrightarrow{e'} E_2', E_1 \xrightarrow{e} E_2)$.*

Soient K' et J' les deux topologies de $\mathcal{C}' = \mathcal{D}/\mathcal{C}$ induites par K et J via les foncteurs d'oubli $\mathcal{D}/\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}/\mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Alors :

(i) Le morphisme $\widehat{\mathcal{C}}'_{K'} \to \widehat{\mathcal{D}}_K$ induit par $\mathcal{C}' = \mathcal{D}/\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une équivalence de topos.

(ii) La topologie K' contient la topologie J' et on a un plongement de topos $\widehat{\mathcal{C}}'_{K'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}'_{J'}$.

(iii) Le foncteur $\mathcal{C}' = \mathcal{D}/\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est une fibration et J' est la "topologie de Giraud" associée à J.

(iv) Le morphisme $\mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ se factorise en $\widehat{\mathcal{D}}_K \cong \widehat{\mathcal{C}}'_{K'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}'_{J'} \to \widehat{\mathcal{C}}_J$.

Correspondances galoisiennes entre sous-objets :

Lemme. – *Soit* $f = (f_!, f^*, f_*) : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ *un morphisme essentiel de topos. Pour tout objet* E' *de* $\mathcal{E}'$*, considérons les deux applications*

$$\{\text{sous-objets } C' \hookrightarrow E'\} \underset{G_{E'}}{\overset{F_{E'}}{\rightleftarrows}} \{\text{sous-objets } C \hookrightarrow f_! E'\}$$

définies par

$$F_{E'}(C' \hookrightarrow E') = (\mathrm{Im}\, f_! C' \hookrightarrow f_! E'),$$
$$G_{E'}(C \hookrightarrow f_! E') = (f^* C \times_{f^* f_! E'} E' \hookrightarrow E').$$

Alors, les deux ensembles de sous-objets étant munis de la relation d'ordre $\subseteq$*, l'application* $F_{E'}$ *est adjointe à gauche de* $G_{E'}$*.*

Corollaire. –
(i) Il y a correspondance bijective entre les $C' \hookrightarrow E'$ *qui sont fixes par* $G_{E'} \circ F_{E'}$ *et les* $C \hookrightarrow E$ *qui sont fixes par* $F_{E'} \circ G_{E'}$*.*
(ii) Pour tout $C' \hookrightarrow E'$*, son image par* $G_{E'} \circ F_{E'}$ *est le plus petit point fixe qui le contient.*
(iii) Pour tout $C \hookrightarrow E$*, son image par* $F_{E'} \circ G_{E'}$ *est le plus grand point fixe qu'il contient.*

Stabilité des points fixes :

Lemme. – *Soit $f = (f_!, f^*, f_*) : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ un morphisme essentiel de topos. Alors :*

(i) Pour tout morphisme $E_2' \xrightarrow{e'} E_1'$ de $\mathcal{E}'$, l'application

$$(C' \hookrightarrow E_1') \longmapsto (C' \times_{E_1'} E_2' \hookrightarrow E_2')$$

transforme les points fixes en points fixes.

(ii) Pour tout sous-objet $C \hookrightarrow E$ d'un objet E de $\mathcal{E}$,

le sous-objet associé de $f^* E$

$$f^* C \longrightarrow f^* E$$

est un point fixe, image de $C \times_E f_! f^* E \hookrightarrow f_! f^* E$.

Démonstration :

(i) Un sous-objet $(C_1' \hookrightarrow E_1')$ est un point fixe

si et seulement si il est de la forme

$$C_1' = f^* C_1 \times_{f^* f_! E_1'} E_1'$$

pour un sous-objet $C_1 \hookrightarrow f_! E_1'$.

Alors $(C_2' = C_1' \times_{E_1'} E_2' \hookrightarrow E_2')$ est de la forme

$$C_2' = f^* C_2 \times_{f^* f_! E_2'} E_2' \quad \text{pour} \quad C_2 = C_1 \times_{f_! E_1'} f_! E_2'.$$

(ii) En effet, si $C_1 = C \times_E f_! f^* E \hookrightarrow f_! f^* E$, on a

$$f^* C_1 \times_{f^* f_! f^* E} f^* E = (f^* C \times_{f^* E} f^* f_! f^* E) \times_{f^* f_! f^* E} f^* E = f^* C \hookrightarrow f^* E.$$

Réunion de points fixes :

Lemme. – *Soit toujours un morphisme essentiel* $f = (f_!, f^*, f_*) : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$.
Alors pour toute famille de sous-objets fixes d'un objet E' *de* $\mathcal{E}'$

$$C'_k \lhook\joinrel\longrightarrow E', \ k \in K,$$

leur réunion

$$\bigvee_{k \in K} C'_k \lhook\joinrel\longrightarrow E'$$

est encore un sous-objet fixe.

Démonstration :

Si les $C'_k \hookrightarrow E'$ correspondent aux sous-objets fixes $C_k \hookrightarrow f_! E$, les formules

$$C'_k = f^* C_k \times_{f^* f_! E'} E'$$

induisent

$$\bigvee_{k \in K} C'_k = f^* \left(\bigvee_{k \in K} C_k \right) \times_{f^* f_! E'} E'.$$

Corollaire. –
Pour tout objet E' *de* $\mathcal{E}'$,
tout sous-objet $C' \hookrightarrow E'$
contient un plus grand sous-objet fixe $\widetilde{C}' \hookrightarrow C' \hookrightarrow E'$.

Caractérisation des topologies définies par images réciproques :

Théorème. – *Soit un morphisme de topos localement connexe*

$$f = (f_!, f^*, f_*) : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Soient un sous-topos

$$\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}$$

et son image réciproque par f

$$\mathcal{E}_1' \hookrightarrow \mathcal{E}'.$$

Soient les topologies associées J sur $\mathcal{E}$ et J' sur $\mathcal{E}'$,
constituées des monomorphismes $(C \hookrightarrow E)$ et $(C' \hookrightarrow E')$

que les foncteurs de faisceautisation $\mathcal{E} \xrightarrow{j^*} \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}' \xrightarrow{j'^*} \mathcal{E}_1'$
transforment en isomorphismes.

Alors un monomorphisme $C' \hookrightarrow E'$ de $\mathcal{E}'$
est élément de J' si et seulement si
son plus grand sous-objet fixe $\widetilde{C}' \hookrightarrow C' \hookrightarrow E'$
correspond à un sous-objet fixe $C \hookrightarrow f_! E'$ qui est élément de J.

Remarque : Ce théorème montre que l'application f^{-1} respecte

les réunions arbitraires de sous-topos, donc a un adjoint à gauche $f_!$.

Caractérisation dans le cas des points fixes :

On considère donc un morphisme localement connexe

$$f = (f_!, f^*, f_*) : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$

un sous-topos $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}$ défini par une topologie J

et son image réciproque $\mathcal{E}_1' \hookrightarrow \mathcal{E}'$ définie par une topologie J'.

Lemme. – *Sous ces hypothèses, considérons un objet E' de $\mathcal{E}'$*
et un sous-objet fixe $C' \hookrightarrow E'$
qui correspond à un sous-objet fixe $C \hookrightarrow f_! E'$.
Alors $C' \hookrightarrow E'$ est élément de J' si et seulement si $C \hookrightarrow f_! E$ est élément de J.

Démonstration :

- L'implication en sens direct résulte de la commutativité du carré :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_1' \arrow[d, "f_!"'] & \mathcal{E}' \arrow[l, "j'^*"'] \arrow[d, "f_!"] \\
\mathcal{E}_1 & \mathcal{E} \arrow[l, "j^*"']
\end{tikzcd}$$

- La réciproque résulte de la formule $C' = f^* C \times_{f^* f_! E'} E'$.

Démonstration du théorème :

• Soit $\widetilde{J}$ la classe des monomorphismes $C' \hookrightarrow E'$ de $\mathcal{E}'$
qui satisfont la propriété de l'énoncé.

• Il résulte du lemme que $\widetilde{J} \subseteq J'$
et que $\widetilde{J}$ contient les générateurs $(f^* C \hookrightarrow f^* E)$ de J'
associés aux éléments $(C \hookrightarrow E)$ de J.
En effet, ces générateurs sont tous des points fixes.

• Pour conclure, il suffit de prouver que $\widetilde{J}$ est une topologie.

• L'axiome de maximalité est évidemment vérifié.

• Pour l'axiome de stabilité, considérons un morphisme $E_2' \to E_1'$ de $\mathcal{E}'$
et un sous-objet fixe $(C_1' \hookrightarrow E_1')$
qui correspond à un sous-objet fixe $(C_1 \hookrightarrow f_! E_1')$ élément de J.
Posant $\quad C_2' = C_1' \times_{E_1'} E_2' \hookrightarrow E_2' \quad$ et $\quad C_2 = C_1 \times_{f_! E_1'} f_! E_2' \hookrightarrow f_! E_2'$
on a $\quad C_2' = f^* C_2 \times_{f^* f_! E_2'} E_2'$.
Comme $(C_1 \hookrightarrow f_! E_1')$ est élément de J, $(C_2 \hookrightarrow f_! E_2')$ est aussi élément de J
et donc $(C_2' \hookrightarrow E_2')$ est élément de J'.

Vérification de l'axiome de transitivité :

• Considérons un objet E' de $\mathcal{E}'$,
un sous-objet fixe $(C' \hookrightarrow E')$ qui est élément de J',
une famille globalement épimorphique $(E'_k \to C')_{k \in K}$
et une famille de sous-objets fixes

$$(C'_k \hookrightarrow E'_k)\,,\ k \in K\,, \quad \text{qui sont éléments de } J'.$$

• Il existe un plus petit sous-objet $\qquad C_0 \hookrightarrow f_! E'$
tel que, pour tout indice $k \in K$,

$$f^*(C_0 \times_{f_! E'} f_! E'_k) \times_{f^* f_! E'_k} E'_k = f^* C_0 \times_{f^* f_! E'} E'_k \hookrightarrow E'_k$$

contienne le sous-objet $C'_k \hookrightarrow E'_k$.

• Pour conclure, il suffit de montrer que le sous-objet

$$(C_0 \hookrightarrow f_! E') \text{ est fixe et élément de } J.$$

• Il est fixe car, notant $C'_0 = f^* C_0 \times_{f^* f_! E'} E'$,
$(C_0 \hookrightarrow E)$ est le plus petit sous-objet tel que

$$f^* C_0 \times_{f^* f_! E'} E' = C'_0.$$

• Il est élément de J car, pour tout indice $k \in K$,
le sous-objet $C_0 \times_{f_! E'} f_! E'_k \supseteq \mathrm{Im}\, f_!(C'_0 \times_{E'} E'_k)$
contient le sous-objet $\mathrm{Im}(f_! C'_k) \hookrightarrow f_! E'_k$.