Opérations sur les sous-topos

Laurent Lafforgue

(Centre de recherche de Huawei, Boulogne-Billancourt, France)

Centre Lagrange, vendredi 29 mars 2024

Les notions de base :

Définition. –
(i) Un <u>topos</u> est une <u>catégorie localement petite</u>
qui est <u>équivalente</u> à la <u>catégorie des faisceaux d'ensembles</u>

$$\widehat{\mathcal{C}}_J$$

sur une <u>catégorie essentiellement petite</u> $\mathcal{C}$
munie d'une <u>topologie de Grothendieck</u> J.

(ii) Un <u>morphisme de topos</u> $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ est un <u>foncteur</u> $f^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ qui

- *<u>respecte</u> les <u>colimites arbitraires</u>*
  (ou, ce qui revient au même, admet un <u>adjoint à droite</u> $f_* : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$),
- *<u>respecte</u> les <u>limites finies</u>.*

Définition. –
(i) Un <u>morphisme de topos</u> $j : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$
consistant en un foncteur $j^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ d'adjoint $j_* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$
est appelé un "<u>plongement</u>" si sa <u>composante d'image directe</u>

$j_* : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ *est <u>pleinement fidèle</u>.*

(ii) Les <u>sous-topos</u> d'un <u>topos</u> $\mathcal{E}$ sont les <u>classes d'équivalence</u>
de <u>plongements</u> $j : \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}$.

Une raison de l'importance des topos : l'incarnation topossique de la sémantique des théories

- Toute théorie "géométrique du premier ordre" $\mathbb{T}$ permet d'associer

$$\begin{cases} - & \text{à tout topos } \mathcal{E} \text{ une catégorie localement petite} \\ & \qquad \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) \\ & \text{des modèles de } \mathbb{T} \text{ paramétrés par } \mathcal{E}, \\ - & \text{à tout morphisme de topos } f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \\ & \text{un foncteur de changement de paramètres} \\ & \qquad f^* : \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}') \,. \end{cases}$$

Théorème. – *(i) Pour toute telle théorie géométrique* $\mathbb{T}$
existe un topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ *(unique à équivalence près)*
qui "classifie" les modèles de $\mathbb{T}$
au sens que, pour tout topos $\mathcal{E}$*, la catégorie de modèles*

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$$

est naturellement équivalente à la catégorie

$$\mathrm{Geom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}}) = \{\textit{catégorie des morphismes de topos } \mathcal{E} \to \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\}.$$

(ii) Réciproquement, pour tout topos $\mathcal{E}$*,*
il existe une infinité de théories $\mathbb{T}$ *qui "décrivent"* $\mathcal{E}$ *au sens que*

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \quad .$$

Une raison de l'importance de la notion de sous-topos : sa double description topologique et logique

Théorème (SGA 4). – *Si un topos $\mathcal{E}$ est associé à un site $(\mathcal{C}, J)$, avec donc*

$$\mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J \quad ,$$

on a :
(i) Toute topologie de Grothendieck J' sur $\mathcal{C}$ qui contient J
définit un sous-topos

$$\widehat{\mathcal{C}}_{J'} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J \quad .$$

(ii) Réciproquement, tout sous-topos $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}$
est associé de cette manière à une unique topologie $J' \supseteq J$ de $\mathcal{C}$.

Théorème (thèse d'Olivia Caramello). –
Si un topos $\mathcal{E}$ est associé à une théorie géométrique $\mathbb{T}$, avec donc

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \quad ,$$

on a:
(i) Toute théorie $\mathbb{T}'$ quotient de $\mathbb{T}$
(définie en ajoutant des axiomes à ceux de $\mathbb{T}$, sans modifier son vocabulaire),
décrit un sous-topos

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \quad .$$

(ii) Réciproquement, tout sous-topos $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}$ est associé
à une théorie quotient $\mathbb{T}'$ de $\mathbb{T}$, unique à équivalence syntactique près.

Comment se donner concrètement une topologie ?

• Une topologie J sur une catégorie $\mathcal{C}$ essentiellement petite est une application qui associe à chaque objet X

- un ensemble de “cribles” c'est-à-dire de sous-préfaisceaux
$$C \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, X)$$
appelés les “cribles couvrants” de X pour J,
- ou, de manière équivalente, un ensemble de familles de morphismes
$$(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$$
appelées les “familles couvrantes” de X pour J,

et qui satisfait trois axiomes dits de “maximalité”, “stabilité”, “transitivité”.

• Toute intersection de topologies sur $\mathcal{C}$ est une topologie, donc toute famille de cribles “engendre” une plus petite topologie qui les contient comme cribles couvrants.

• Une topologie peut être donnée par

(1) une famille de cribles qui l'engendre,
(2) une condition axiomatique qui caractérise les cribles couvrants pour J,
(3) une application “base”
$$X \mapsto \mathcal{B}_X = \text{ensemble de familles de morphismes } (X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$$
telle qu'un crible d'un objet X soit “couvrant” pour J
si et seulement si il contient une famille de morphismes qui soit élément de $\mathcal{B}_X$.

Comment se donner concrètement une théorie quotient ?

• Une théorie géométrique $\mathbb{T}$ consiste en
un vocabulaire (ou “signature”) constitué par

$$\begin{cases} - & \text{des “noms d'objets” (ou “sortes”),} \\ - & \text{des “noms de morphismes” (ou “symboles de fonctions”)} \\ - & \text{des “noms de sous-objets” (ou “symboles de relations”)} \end{cases}$$

et des axiomes qui ont la forme d'implications (ou “séquents”)
entre formules géométriques

$$\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x}) \, .$$

• Une théorie quotient $\mathbb{T}'$ de $\mathbb{T}$ consiste en le même vocabulaire
et des axiomes supplémentaires toujours de la forme

$$\varphi'(\vec{x}') \vdash \psi'(\vec{x}') \, .$$

• Deux théories quotients $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ de $\mathbb{T}$ sont “syntactiquement équivalentes”
si toute implication

$$\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$$

démontrable dans l'une est démontrable dans l'autre.

$\rightarrow$ Le vérifier est équivalent au problème général de démontrabilité.

$\rightarrow$ C'est équivalent à demander que les deux sous-topos

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}_1} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\mathbb{T}_2} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

se confondent.

Comment construire le topos classifiant d'une théorie ?

• Une théorie géométrique $\mathbb{T}$ définit une "catégorie syntactique" $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ munie de la "topologie syntactique" $J_{\mathbb{T}}$ telle que

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}} .$$

Cependant, la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ n'est pas explicite en général puisque sa description fait appel à la notion de $\mathbb{T}$-démontrabilité.

• Si $\mathbb{T}$ est écrite comme quotient d'une théorie géométrique Σ pour laquelle on dispose déjà d'une représentation

$$\mathcal{E}_{\Sigma} \cong \widehat{\mathcal{C}}_{J} , \quad \text{on a} \quad \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \widehat{\mathcal{C}}_{J'}$$

pour une topologie J' de $\mathcal{C}$ qui contient J.

Chaque axiome supplémentaire de $\mathbb{T}$ par rapport à Σ

$$\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$$

définit un morphisme $\quad (\varphi \wedge \psi)(\vec{x}) \hookrightarrow \varphi(\vec{x}) \quad$ dans $\quad \widehat{\mathcal{C}}_{J}$.

Alors $J' \supseteq J$ est la topologie la moins fine pour laquelle ces morphismes sont couvrants.

• Si Σ est une théorie vide (c'est-à-dire sans axiomes) ou plus généralement cartésienne, on a

$$\mathcal{E}_{\Sigma} \cong \widehat{\mathcal{C}}_{\Sigma}$$

si $\mathcal{C}_{\Sigma}$ est la "catégorie syntactique cartésienne" de Σ.

• La description de $\mathcal{C}_{\Sigma}$ est simple et complètement explicite si Σ n'a pas de "symboles de fonctions".

Ordre et opérations internes sur les sous-topos :

Proposition. – *Pour tout topos $\mathcal{E}$, ses sous-topos forment un ensemble ordonné par l'inclusion.*

Remarques :

(i) Si $\mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J$, une inclusion entre sous-topos $\mathcal{E}' \leq \mathcal{E}''$

avec $\quad \mathcal{E}' \cong \widehat{\mathcal{C}}_{J'} \quad$ et $\quad \mathcal{E}'' \cong \widehat{\mathcal{C}}_{J''}$

correspond à une inclusion en sens inverse $J' \supseteq J''$.

(ii) Si $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, une inclusion entre sous-topos $\mathcal{E}' \leq \mathcal{E}''$

avec $\quad \mathcal{E}' \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \quad$ et $\quad \mathcal{E}'' \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \quad$ où $\mathbb{T}', \mathbb{T}'' =$ quotients de $\mathbb{T}$,

signifie que tout axiome de $\mathbb{T}''$ est démontrable dans $\mathbb{T}'$.

Proposition. –

(i) Toute famille de sous-topos $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ d'un topos $\mathcal{E}$ admet une réunion $\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i$ et une intersection $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i$ caractérisées par

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{E}_i \leq \mathcal{E}' \Leftrightarrow \mathcal{E}_i \leq \mathcal{E}' \,, \quad \forall\, i \in I \,,$$

$$\mathcal{E}' \leq \bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_i \Leftrightarrow \mathcal{E}' \leq \mathcal{E}_i \,, \quad \forall\, i \in I \,.$$

(ii) Pour tous sous-topos $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ existe un sous-topos de "différence"

$\mathcal{E}_1 \backslash \mathcal{E}_2$ *caractérisé par*

$$\mathcal{E}_1 \backslash \mathcal{E}_2 \leq \mathcal{E}' \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}' \,.$$

Les expressions concrètes d'une réunion de sous-topos :

Proposition. – *Pour tout topos $\mathcal{E}$ défini par une topologie J sur une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$, et toute famille de sous-topos*

$$\mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}, \quad i \in I,$$

définis par des topologies $J_i \supseteq J$ de $\mathcal{C}$, le sous-topos

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}$$

est défini par la topologie $\bigcap\limits_{i \in I} J_i$ de $\mathcal{C}$.

Remarque :

Si chaque topologie J_i est définie par une application base $X \mapsto \mathcal{B}_i(X)$, alors un crible C sur un objet X est couvrant pour $\bigcap\limits_{i \in I} J_i$ si et seulement si, pour tout $i \in I$, il contient une famille de morphismes qui soit élément de $\mathcal{B}_i(X)$.

Proposition. – *Si $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ et les sous-topos $\mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}$, $i \in I$, correspondent à des théories quotients $\mathbb{T}_i$, $i \in I$, de $\mathbb{T}$, alors le topos $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{E}_i$ correspond à une théorie quotient $\mathbb{T}'$ si et seulement si les implications $\mathbb{T}'$-démontrables $\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$ sont celles qui sont démontrables dans chaque théorie $\mathbb{T}_i$, $i \in I$.*

Les expressions concrètes d'une intersection de sous-topos :

Proposition. – *Pour tout topos $\mathcal{E}$ qui classifie une théorie géométrique $\mathbb{T}$ et toute famille de sous-topos*

$$\mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}, \quad i \in I,$$

qui classifient des théories quotients $\mathbb{T}_i$ de $\mathbb{T}$, le sous-topos

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}$$

classifie la théorie quotient $\mathbb{T}'$ de $\mathbb{T}$ dont la famille des axiomes est la réunion des familles d'axiomes des théories $\mathbb{T}_i$, $i \in I$.

Proposition. – *Si $\mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J$ et les sous-topos $\mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}$, $i \in I$, correspondent à des topologies $J_i \supseteq J$ de $\mathcal{C}$, alors le sous-topos $\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{E}_i$ correspond à la topologie engendrée par la famille des cribles*

$$X \longmapsto \bigcup_{i \in I} J_i(X)\,.$$

Remarque :

En particulier, si chaque topologie J_i est engendrée par une famille de cribles, alors la topologie qui correspond à $\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{E}_i$ est engendrée par la réunion de ces familles de cribles.

La notion de fermeture d'un crible :

Définition. – *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite.*
Soit J une topologie de $\mathcal{C}$ ou plus généralement une application

$$X \longmapsto J(X) = \text{ensemble de cribles de } X$$

qui est "stable" au sens que, pour tout morphisme de $\mathcal{C}$

$$x : X' \longrightarrow X$$

l'application x^* envoie $J(X)$ dans $J(X')$.
Alors un crible C sur un objet X est dit "J-fermé"
si un morphisme $x : X' \to X$ est dans C
dès qu'il existe un crible $C' \in J(X')$ tel que

$$(x \circ x' : X'' \xrightarrow{x'} X' \xrightarrow{x} X) \in C\,, \quad \forall\,(X'' \xrightarrow{x'} X') \in C'\,.$$

Lemme. –
(i) Dans cette situation,
toute intersection de cribles J-fermés sur un objet X
est encore un crible J-fermé sur X.
(ii) Par conséquent, pour tout crible C sur X,
il existe un plus petit crible J-fermé $\overline{C}$ sur X
qui contient C.

Une formule d'engendrement des topologies :

Voici une version simplifiée d'un théorème d'Olivia Caramello fondé sur les "opérateurs gauche et droite de Joyal" :

Théorème. – *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite.*
Soit J une application

$$X \longmapsto J(X) = \textit{ensemble de cribles de } X$$

qui est "stable" par images réciproques par les morphismes $x : X' \to X$ de $\mathcal{C}$.
Alors la topologie $\overline{J}$ engendrée par J est constituée des cribles

$$C \textit{ sur les objets } X \textit{ de } \mathcal{C}$$

tels que

$$\overline{C} \textit{ est le crible maximal de } X.$$

Corollaire. – *Soit $(J_i)_{i \in I}$ une famille de topologies sur $\mathcal{C}$.*
Alors la topologie engendrée par la réunion $X \mapsto \bigcup_{i \in I} J_i(X)$
est constituée des cribles

$$C \textit{ sur les objets } X \textit{ de } \mathcal{C}$$

tels que l'unique crible contenant C qui est J_i-fermé pour tout $i \in I$ est le crible maximal sur X.

Les expressions topologiques des différences de sous-topos :

• On considère deux sous-topos d'un topos $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E} \qquad \mathcal{E}_2 \hookrightarrow \mathcal{E}.$$

Leur différence est le sous-topos $\mathcal{E}_1 \backslash \mathcal{E}_2$ caractérisé par l'équivalence

$$\mathcal{E}_1 \backslash \mathcal{E}_2 \leq \mathcal{E}' \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}'.$$

Théorème. – *Supposons que $\mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J$*
et que les sous-topos $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ correspondent à deux topologies de $\mathcal{C}$

$$J_1 \supseteq J \qquad \text{et} \qquad J_2 \supseteq J\,.$$

Alors le sous-topos $\mathcal{E}_1 \backslash \mathcal{E}_2$ correspond à la topologie

$$J_0 = (J_2 \Rightarrow J_1)$$

pour laquelle un crible

$$C \text{ sur un objet } X \text{ de } \mathcal{C}$$

est couvrant si et seulement si :

• *Pour tout morphisme $x : X' \to X$,*
le crible maximal est l'unique crible sur X' qui

$$\begin{cases} - & \text{contient } x^*(C), \\ - & \text{est } J_1\text{-fermé}, \\ - & \text{est } J_2\text{-couvrant.} \end{cases}$$

La notion d'image d'un morphisme de topos :

Définition. – *Un morphisme de topos $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ est appelé une "submersion" si le foncteur*

$$f^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$$

est fidèle ou, ce qui revient au même, si, pour tout objet E de $\mathcal{E}$, l'application

$$f^* : \{\text{sous-objets de } E\} \longrightarrow \{\text{sous-objets de } f^* E\}$$

est injective.

Proposition. – *Soit un morphisme de topos $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$.*
(i) L'ensemble des sous-topos $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}$ tels que f se factorise en

$$\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longhookrightarrow \mathcal{E}$$

possède un plus petit élément appelé l'image de f et noté $\mathrm{Im}(f) \hookrightarrow \mathcal{E}$.
(ii) La factorisation de f en

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathrm{Im}(f) \longhookrightarrow \mathcal{E}$$

est caractérisée par la propriété que le morphisme induit

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathrm{Im}(f)$$

est une submersion.

Les opérations d'image directe et d'image réciproque des sous-topos :

Définition. – *Tout morphisme de topos* $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ *définit une application d'image directe*

$$f_* : \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}'\} \longrightarrow \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}\}$$

qui associe à tout sous-topos $\mathcal{E}'_1 \hookrightarrow \mathcal{E}_1$ *l'image dans* $\mathcal{E}$ *du morphisme composé*

$$\mathcal{E}'_1 \hookrightarrow \mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}.$$

Lemme. – *Pour tout morphisme de topos* $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$, *l'application*

$$f_* : \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}'\} \longrightarrow \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}\}$$

respecte la relation d'inclusion des sous-topos, et elle respecte les réunions arbitraires de sous-topos $(\mathcal{E}'_i \hookrightarrow \mathcal{E}')_{i \in I}$

$$f_* \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}'_i \right) = \bigcup_{i \in I} f_*(\mathcal{E}'_i) \, .$$

Corollaire. – *Cette application d'image directe des sous-topos* f_* *possède un adjoint à droite*

$$f^{-1} : \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}\} \longrightarrow \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}'\}$$

caractérisé par la propriété que

$$f_*(\mathcal{E}'_1) \leq \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow \mathcal{E}'_1 \leq f^{-1}\mathcal{E}_1 \, .$$

Les expressions logiques des images directes :

Proposition. –
Considérons une théorie géométrique $\mathbb{T}$ *et un morphisme de topos*

$$m : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

qui correspond à un modèle de $\mathbb{T}$ *paramétré par* $\mathcal{E}$

$$M \in \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})\,.$$

Alors le sous-topos image

$$\mathrm{Im}(m) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

est associé à une théorie quotient $\mathbb{T}_M$ *de* $\mathbb{T}$
si et seulement si $\mathbb{T}_M$ *est une "théorie du modèle* M*"*
au sens que les implications

$$\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$$

qui sont démontrables dans $\mathbb{T}_M$
sont exactement celles qui sont vérifiées par le modèle M
au sens que le monomorphisme de $\mathcal{E}$ *qui relie leurs interprétations*

$$M(\varphi \wedge \psi) \hookrightarrow M\varphi$$

est un isomorphisme.

Les expressions faisceautiques des interprétations de formules :

• Considérons une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$ munie d'une topologie J, avec les deux foncteurs adjoints

$$\left(j^* : \widehat{\mathcal{C}} \to \widehat{\mathcal{C}}_J \,,\; j_* : \widehat{\mathcal{C}}_J \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}\right).$$

• Considérons d'autre part une théorie géométrique $\mathbb{T}$ écrite dans un vocabulaire Σ constitué de noms d'objets, de morphismes, et de relations.

• Un modèle de Σ dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$ est un foncteur

$$M : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \Sigma\text{-mod}(\mathrm{Ens})$$

tel que

- pour tout nom d'objet A de Σ, le préfaisceau
  $MA : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est un J-faisceau,
- pour tout nom de relation $R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$ de Σ, le sous-préfaisceau
  $MR \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n$ est un J-faisceau.

• Un tel modèle M de Σ est un modèle de $\mathbb{T}$ dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$ si et seulement si, pour tout axiome de $\mathbb{T}$

$$\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x}) \,, \quad \vec{x} = (x_1^{A_1}, \cdots, x_n^{A_n}),$$

le plongement entre sous-préfaisceaux de $MA_1 \times \cdots \times MA_n$

$$M(\varphi \wedge \psi) \longrightarrow M\varphi$$

est transformé par $j^* : \widehat{\mathcal{C}} \to \widehat{\mathcal{C}}_J$ en un isomorphisme.

Les expressions logiques des images réciproques :

• On considère toujours un morphisme de topos

$$m : \widehat{\mathcal{C}}_J \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

correspondant à un modèle M
d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$ de vocabulaire Σ
dans le topos $\widehat{\mathcal{C}}_J$ des J-faisceaux sur une catégorie $\mathcal{C}$.
• Considérons une théorie quotient $\mathbb{T}'$ de $\mathbb{T}$ définie par des axiomes additionnels

$$\varphi_i(\vec{x}_i) \vdash \psi_i(\vec{x}_i)\,, \quad i \in I,$$

et le sous-topos qui lui est associé

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}.$$

• Pour chaque tel axiome $\varphi_i \vdash \psi_i$, on considère
le monomorphisme canonique entre les préfaisceaux d'interprétation

$$M(\varphi_i \wedge \psi_i) \hookrightarrow M\varphi_i$$

puis, pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et tout élément

$$x_i \in M\varphi_i(X) = \mathrm{Hom}(y(X), M\varphi_i)$$

le crible induit

$$C_{x_i} = M(\varphi_i \wedge \psi_i) \times_{M\varphi_i} y(X) \hookrightarrow y(X) = \mathrm{Hom}(\bullet, X)\,.$$

• Alors le sous-topos de $\widehat{\mathcal{C}}_J$ image réciproque de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$
est défini par la topologie $J' \supseteq J$ de $\mathcal{C}$
qui est engendrée par J et par la famille (stable) des cribles

$$C_{x_i} \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, X)\,.$$

Proposition. – *Considérons un site $(\mathcal{C}, J)$ et un morphisme de topos*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$$

qui correspond à un foncteur

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E} \qquad (\text{avec } F = f^* \circ j^* \circ y : \mathcal{C} \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{f^*} \mathcal{E})$$

qui est

- *"plat" au sens que l'unique prolongement de F qui respecte les colimites*

  $$\widehat{F} : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{E}$$

  respecte aussi les limites finies
- *"J-continu" au sens qu'il transforme les familles J-couvrantes*

  $$\left(X_i \xrightarrow{x_i} X\right)_{i \in I}$$

  en familles épimorphiques de $\mathcal{E}$.

Alors le sous-topos image

$$\mathrm{Im}(f) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$$

est défini par la topologie $J' \supseteq J$ de $\mathcal{C}$ pour laquelle une famille de morphismes de $\mathcal{C}$

$$\left(X_i \xrightarrow{x_i} X\right)_{i \in I}$$

est J'-couvrante si et seulement si sa transformée par F est épimorphique dans $\mathcal{E}$.

Les expressions faisceautiques des conditions d'épimorphie :

• On considère toujours un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$
d'une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$ dans un topos $\mathcal{E}$.
• On suppose que $\mathcal{E}$ est écrit comme le topos des faisceaux

$$\widehat{\mathcal{D}}_K \quad \text{sur un site} \quad (\mathcal{D}, K).$$

• Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}_K$ est plat si et seulement si
le composé $\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\widehat{F}} \widehat{\mathcal{D}}_K \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}$ respecte les limites finies.
• Pour toute famille de morphismes de $\mathcal{C}$ de but un objet X

$$\mathcal{X} = (x_i : X_i \longrightarrow X)_{i \in I}\,,$$

tout objet D de $\mathcal{D}$ et tout élément

$$d \in F(X)(D) = \mathrm{Hom}(y(D), F(X))\,,$$

les morphismes $d' : D' \to D$ de $\mathcal{D}$ qui s'inscrivent dans au moins un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} y(D') \arrow[r, "y(d')"] \arrow[d] & y(D) \arrow[d, "d"] \\ F(X_i) \arrow[r, "F(x_i)"] & F(X) \end{tikzcd}$$

forment un crible $C_{\mathcal{X},D,d}$ de D.

Proposition. – *Le foncteur F est J-continu si et seulement si, pour tout J-recouvrement*

$$\mathcal{X} = (x_i : X_i \to X)_{i \in I} \quad \text{(dans un sous-ensemble qui engendre } J\text{)},$$

les cribles associés $C_{\mathcal{X},D,d}$ des objets D de $\mathcal{D}$ sont K-couvrants.

Les expressions topologiques des images directes et réciproques de sous-topos :

• On considère un morphisme de topos $f : \widehat{\mathcal{D}}_K \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$
défini par un foncteur plat et J-continu $F : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_K$.

Proposition. –
*(i) Pour tout sous-topos $\widehat{\mathcal{D}}_{K'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_K$ défini par une topologie $K' \supseteq K$ de $\mathcal{D}$,
son image par f est le sous-topos $\widehat{\mathcal{C}}_{J'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$ défini par la topologie $J' \supseteq J$ de $\mathcal{C}$
pour laquelle une famille de morphismes*

$$\mathcal{X} = (x_i : X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$$

*est J'-couvrante si et seulement si,
pour tout objet D de $\mathcal{D}$ et tout élément $d \in F(X)(D)$,
le crible associé $C_{\mathcal{X},D,d}$ de D est K'-couvrant.*

*(ii) Pour tout sous-topos $\widehat{\mathcal{C}}_{J'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$
son image réciproque par f est le sous-topos*

$$\widehat{\mathcal{D}}_{K'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_K \text{ défini par la topologie } K' \supseteq K \text{ de } \mathcal{D}$$

engendrée par K et par la famille stable de cribles

$$C_{\mathcal{X},D,d} \quad \text{des objets } D \text{ de } \mathcal{D}$$

associés au choix d'une famille J'-couvrante

$$\mathcal{X} = (x_i : X_i \to X)_{i \in I} \quad \text{(dans un sous-ensemble qui engendre } J' \text{ sur } J\text{)}$$

et d'un élément $d \in F(X)(D)$.