Mesures,
topologies de Grothendieck
et logique des mesures

par Laurent Lafforgue

(Centre de recherche de Huawei, Boulogne-Billancourt, France)

II. Statistiques sur des sites ou des théories,
théorie propositionnelle des statistiques,
et topos localique des mesures

Points des topos et mesures de Dirac associées :

Définition. – *Pour tout point d'un topos* $\mathcal{E}$ $\quad x = (x^*, x_*) : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}$,
la mesure de Dirac associée est l'application

$$\begin{array}{rcl} \delta_x : \mathrm{Ob}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \\ E & \longmapsto & \#\,(x^* E)\,. \end{array}$$

Remarques. –

(i) Pour toute suite $(\mathcal{C}, J)$, le foncteur canonique

$$\ell : \mathcal{C} \overset{y}{\hookrightarrow} \widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J$$

permet d'associer à tout point x de $\widehat{\mathcal{C}}_J$ la mesure induite

$$\begin{array}{rcl} \delta_x : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \\ X & \longmapsto & \#\,(x^* \ell(X))\,. \end{array}$$

(ii) Pour toute théorie géométrique $\mathbb{T}$, les points de $\quad \mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}}$
sont les modèles ensemblistes M de $\mathbb{T}$.
Ils définissent des mesures de Dirac des formules géométriques
$\varphi = \varphi(\vec{x})$ écrites dans la signature Σ de $\mathbb{T}$

$$\begin{array}{rcccl} \delta_M & : & \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}) & \longrightarrow & \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ & & \varphi = \varphi(\vec{x}) & \longmapsto & \#\,(M\varphi(\vec{x}))\,. \end{array}$$

Propriétés générales des mesures de Dirac des topos :

Lemme. – *La mesure de Dirac δ_x associée à un point x d'un topos $\mathcal{E}$ possède les propriétés suivantes :*

(1) *Pour tout morphisme $E' \xrightarrow{e} E$ de $\mathcal{E}$, on a*

$$\begin{cases} \bullet \quad \delta_x(E') \leq \delta_x(E) & \text{si } e \text{ est un monomorphisme,} \\ \bullet \quad \delta_x(E') = \delta_x(E) & \text{si } e \text{ est un isomorphisme,} \\ \bullet \quad \delta_x(E') \geq \delta_x(E) & \text{si } e \text{ est un épimorphisme.} \end{cases}$$

(2) *Si E est recouvert par une famille $(E_i \to E)$ on a* $\delta_x(E) \leq \sum\limits_{i \in I} \delta_x(E_i)$ *avec égalité si* $E \cong \coprod\limits_{i \in I} E_i$.

(3) *Pour tous sous-objets E', E'' d'un objet E, on a*

$$\delta_x(E') + \delta_x(E'') = \delta_x(E' \vee E'') + \delta_x(E' \wedge E'') .$$

(4) *Pour tout morphisme $E' \to E$ de $\mathcal{E}$ tel qu'existent une famille couvrante $(E_k \to E)_{k \in K}$ et des isomorphismes au-dessus des E_k*

$$E_k \times_E E' \xrightarrow{\sim} \coprod_{i \in I} E_k \, , \quad \text{on a} \quad \delta_x(E') = (\# I) \cdot \delta_x(E) .$$

(5) *Pour tous objets E_1, E_2 de $\mathcal{E}$, on a*

$$\delta_x(E_1 \times E_2) = \delta_x(E_1) \cdot \delta_x(E_2) \text{ (en posant } 0 \cdot (+\infty) = 0\text{)}$$

et, pour l'objet terminal $1_{\mathcal{E}} = 1$ de $\mathcal{E}$, on a $\delta_x(1) = 1$.

Propriété des mesures de Dirac des sites :

Corollaire. – *Pour tout site* $(\mathcal{C}, J)$ *muni de* $\ell : \mathcal{C} \overset{y}{\hookrightarrow} \widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J$,
la mesure de Dirac δ_x *associée à un point* x *de* $\widehat{\mathcal{C}}_J$ *vérifie :*

(1) *Pour tout morphisme* $X' \xrightarrow{u} X$ *de* $\mathcal{C}$*, on a*

$$\begin{cases} \bullet \quad \delta_x(X') \leq \delta_x(X) & \text{si } u \text{ est un monomorphisme,} \\ \bullet \quad \delta_x(X') = \delta_x(X) & \text{si } u \text{ est un isomorphisme,} \\ \bullet \quad \delta_x(X') \geq \delta_x(X) & \text{si } X' \xrightarrow{u} X \text{ est } J\text{-couvrant.} \end{cases}$$

(2) *Si* X *est recouvert par une famille* $(X_i \to X)_{i \in I}$*, on a* $\quad \delta_x(X) \leq \sum\limits_{i \in I} \delta_x(X_i)$
avec égalité si $\quad \ell(X) \cong \coprod\limits_{i \in I} \ell(X_i)$.

(3) *Pour tous sous-objets* X', X'' *d'un objet* X*, on a*

$$\delta_x(X') + \delta_x(X'') = \delta_x(y(X') \wedge y(X'')) + \delta_x(\ell(X') \vee \ell(X'')) \, .$$

(4) *Pour tout morphisme* $X' \to X$ *de* $\mathcal{C}$
tel qu'existent une famille J*-couvrante* $(X_k \to X)_{k \in K}$
et des isomorphismes au-dessus des $\ell(X_k)$

$$\ell(X_k) \times_{\ell(X)} \ell(X') \xrightarrow{\sim} \coprod_{i \in I} \ell(X_k) \, , \quad k \in K \quad , \qquad \text{on a} \qquad \delta_x(X') = (\# I) \cdot \delta_x(X) \, .$$

(5) *On a pour tous objets* X_1, X_2 *de* $\mathcal{C}$

$$\delta_x(y(X_1) \times y(X_2)) = \delta_x(X_1) \cdot \delta_x(X_2)$$

et, pour l'objet terminal 1 *de* $\widehat{\mathcal{C}}$ *ou* $\widehat{\mathcal{C}}_J$ $\qquad \delta_x(1) = 1 \, .$

Propriétés des mesures de Dirac des théories :

Corollaire. –
Pour toute théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ de signature Σ, la mesure de Dirac δ_M associée à un modèle ensembliste M de $\mathbb{T}$ vérifie :

(1) *Pour toutes formules géométriques $\varphi(\vec{x})$ et $\psi(\vec{x},\vec{y})$ de Σ, on a*

$$\begin{cases} \bullet \quad \delta_M(\psi) \leq \delta_M(\varphi) \quad \text{si } \vec{y} \text{ est vide et } \psi \vdash_{\vec{x}} \varphi \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable,} \\ \bullet \quad \delta_M(\psi) \geq \delta_M(\varphi) \quad \text{si } (\exists \vec{y})\psi(\vec{x},\vec{y}) \dashv\vdash_{\vec{x}} \varphi \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable,} \\ \quad\;\; \text{avec égalité si de plus } \psi(\vec{x},\vec{y}) \wedge \psi(\vec{x},\vec{y}\,') \vdash \vec{y} = \vec{y}\,' \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable.} \end{cases}$$

(2) *Pour toutes formules $\varphi(\vec{x})$ et $\psi_i(\vec{x},\vec{y}_i)$, $i \in I$, on a*

$$\delta_M(\varphi) \leq \sum_{i\in I} \delta_M(\psi_i) \quad \text{si } \varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{i\in I} (\exists \vec{y}_i)\psi_i(\vec{x},\vec{y}_i) \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable}$$

avec égalité si, pour tous indices $i, i' \in I$,

$$\begin{cases} \bullet \quad \psi_i(\vec{x},\vec{y}_i) \wedge \psi_i(\vec{x},\vec{y}_i\,') \vdash \vec{y}_i = \vec{y}_i\,' \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable si } i = i', \\ \bullet \quad (\exists \vec{y}_i)\psi_i(\vec{x},\vec{y}_i) \wedge (\exists \vec{y}_{i'})\psi_{i'}(\vec{x},\vec{y}_{i'}) \vdash \perp \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable si } i \neq i'. \end{cases}$$

(3) *Pour toutes formules φ', φ'' dans un même contexte $\vec{x}$, on a*

$$\delta_M(\varphi') + \delta_M(\varphi'') = \delta_M(\varphi' \wedge \varphi'') + \delta_M(\varphi' \vee \varphi'')\,.$$

Propriétés des mesures de Dirac des théories :

Corollaire (suite). –

(4) *Pour tout morphisme* $\psi(\vec{y}) \to \varphi(\vec{x})$ *de* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$
tel qu'existent une famille $J_{\mathbb{T}}$*-couvrante* $(\varphi_k(\vec{x}_k) \to \varphi(\vec{x}))_{k\in K}$
et des isomorphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ *au-dessus des* $\varphi_k(\vec{x}_k)$

$$\varphi_k(\vec{x}_k) \times_{\varphi(\vec{x})} \psi(\vec{y}) \xrightarrow{\sim} \coprod_{i\in I} \varphi_k(\vec{x}_k)\,, \quad k \in K\,,$$

on a

$$\delta_M(\psi) = (\# I) \cdot \delta_M(\varphi)\,.$$

(5) *On a pour toutes formules géométriques* $\varphi(\vec{x})$ *et* $\psi(\vec{y})$

$$\delta_M(\varphi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{y})) = \delta_M(\varphi) \cdot \delta_M(\psi)$$

si les contextes $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ *sont disjoints,*
et la formule du vrai $\top$ *en le contexte vide a pour mesure*

$$\delta_M(\top) = 1\,.$$

Suite de points et moyennes de dénombrements :

Définition. – *Pour toute suite $x_\bullet$ de points d'un topos $\mathcal{E}$*

$$x_\bullet = (x_n : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E})_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

la suite des mesures moyennes associées est la suite des applications

$$\begin{array}{rcl} \mu_n^{x_\bullet} : \mathrm{Ob}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \frac{1}{n+1}\cdot\mathbb{N}\cup\{+\infty\}\,, \\ E & \longmapsto & \frac{1}{n+1}\cdot \sum\limits_{0\le k\le n} \delta_{x_k}(E)\,, \end{array}$$

indexées par les entiers $n\in\mathbb{N}$.

Remarques. –

(i) Pour tout site $(\mathcal{C}, J)$, toute suite $x_\bullet$ de points du topos $\widehat{\mathcal{C}}_J$ définit une suite de fonctions $\mu_n^{x_\bullet}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_+\cup\{+\infty\}$, sur les objets de $\mathcal{C}$ ou plus généralement de $\widehat{\mathcal{C}}$, par composition avec les foncteurs

$$\ell : \mathcal{C} \xhookrightarrow{y} \widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J\,.$$

(ii) En particulier, pour toute théorie géométrique $\mathbb{T}$ de signature Σ, toute suite $M_\bullet$ de modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$ définit une suite de fonctions $\quad \mu_n^{M_\bullet} : \mathrm{Ob}(\mathcal{E}_\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{Q}_+\cup\{+\infty\}$ et, par composition avec $\mathcal{C}_\mathbb{T} \overset{\ell}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_\mathbb{T}$,

$$\mu_n^{M_\bullet} : \{\text{formules géométriques de } \Sigma\} \longrightarrow \mathbb{Q}_+\cup\{+\infty\}\,.$$

Propriétés générales des mesures moyennes de dénombrements :

Lemme. – *Pour tous points* $x_0, \cdots, x_n$ *d'un topos* $\mathcal{E}$*,*
la mesure moyenne associée $\mu_n = \frac{1}{n+1} \cdot \sum\limits_{0 \leq k \leq n} \delta_{x_k}$ *sur* $\mathrm{Ob}(\mathcal{E})$
possède les propriétés suivantes :

(1) *Pour tout morphisme* $E' \xrightarrow{e} E$ *de* $\mathcal{E}$*, on a*

$$\begin{cases} \bullet \quad \mu_n(E') \leq \mu_n(E) & \text{si } e \text{ est un monomorphisme,} \\ \bullet \quad \mu_n(E') \geq \mu_n(E) & \text{si } e \text{ est un épimorphisme,} \\ \bullet \quad \mu_n(E') = \mu_n(E) & \text{si } e \text{ est un isomorphisme.} \end{cases}$$

(2) *Si* E *est recouvert par une famille* $(E_i \to E)_{i \in I}$*, on a* $\mu_n(E) \leq \sum\limits_{i \in I} \mu_n(E_i)$
avec égalité si $E \cong \coprod\limits_{i \in I} E_i$.

(3) *Pour tous sous-objets* E', E'' *d'un objet* E*, on a*

$$\mu_n(E') + \mu_n(E'') = \mu_n(E' \vee E'') + \mu_n(E' \wedge E'') \, .$$

(4) *Pour tout morphisme* $E' \to E$ *de* $\mathcal{E}$
tel qu'existent une famille couvrante $(E_k \to E)_{k \in K}$
et des isomorphismes au-dessus des E_k

$$E_k \times_E E' \xrightarrow{\sim} \coprod_{i \in I} E_k \quad , \quad \text{on a} \quad \mu_n(E') = (\# I) \cdot \mu_n(E) \, .$$

(5) *L'objet terminal* $1_{\mathcal{E}} = 1$ *de* $\mathcal{E}$ *a pour mesure* $\mu_n(1) = 1$.

Propriétés des mesures moyennes de dénombrements des sites :

Corollaire. – *Pour tout site* $(\mathcal{C}, J)$ *muni de* $\ell : \mathcal{C} \overset{y}{\hookrightarrow} \widehat{\mathcal{C}} \overset{j^*}{\to} \widehat{\mathcal{C}}_J$,
la mesure moyenne $\mu_n = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{0 \le k \le n} \delta_{x_k}$ *associée à des points* $x_0, \cdots, x_n$ *de* $\widehat{\mathcal{C}}_J$
possède les propriétés suivantes :

(1) *Pour tout morphisme* $X' \xrightarrow{u} X$ *de* $\mathcal{C}$*, on a*

$$\begin{cases} \bullet \quad \mu_n(X') \le \mu_n(X) & \text{si } u \text{ est un monomorphisme,} \\ \bullet \quad \mu_n(X') = \mu_n(X) & \text{si } u \text{ est un isomorphisme,} \\ \bullet \quad \mu_n(X') \ge \mu_n(X) & \text{si } X' \xrightarrow{u} X \text{ est } J\text{-couvrant.} \end{cases}$$

(2) *Si* X *est recouvert par une famille* $(X_i \to X)_{i \in I}$*, on a* $\mu_n(X) \le \sum_{i \in I} \mu_n(X_i)$
avec égalité si $\ell(X) \cong \coprod_{i \in I} \ell(X_i)$.

(3) *Pour tous sous-objets* X', X'' *d'un objet* X *de* $\mathcal{C}$*, on a*

$$\mu_n(X') + \mu_n(X'') = \mu_n(y(X') \wedge y(X'')) + \mu_n(\ell(X') \vee \ell(X''))\,.$$

(4) *Pour tout morphisme* $X' \to X$ *de* $\mathcal{C}$
tel qu'existent une famille J*-couvrante* $(X_k \to X)_{k \in K}$
et des isomorphismes au-dessus des $\ell(X_k)$

$$\ell(X_k) \times_{\ell(X)} \ell(X') \xrightarrow{\sim} \coprod_{i \in I} \ell(X_k)\,, \quad k \in K \quad , \qquad \text{on a} \quad \mu_n(X') = (\# I) \cdot \mu_n(X)\,.$$

(5) *L'objet terminal* 1 *de* $\widehat{\mathcal{C}}$ *ou* $\widehat{\mathcal{C}}_J$ *a pour mesure* $\mu_n(1) = 1\,.$

Propriétés des mesures moyennes de dénombrements des théories :

Corollaire. –
Pour toute théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ *de signature* Σ,
la mesure moyenne $\mu_n = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{0 \le k \le n} \mu_{M_k}$ *associée à des modèles* $M_0, \cdots, M_n$ *de* $\mathbb{T}$
possède les propriétés suivantes :

(1) *Pour toutes formules géométriques* $\varphi(\vec{x})$ *et* $\psi(\vec{x}, \vec{y})$ *de* Σ *on a*

- $\mu_n(\psi) \le \mu_n(\varphi)$ *si* $\vec{y}$ *est vide et* $\psi \vdash_{\vec{x}} \varphi$ *est* $\mathbb{T}$*-démontrable,*
- $\mu_n(\psi) \ge \mu_n(\varphi)$ *si* $(\exists\, \vec{y})\psi(\vec{x}, \vec{y}) \dashv\vdash_{\vec{x}} \varphi$ *est* $\mathbb{T}$*-démontrable*

avec égalité si de plus $\psi(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \psi(\vec{x}, \vec{y}\,') \vdash \vec{y} = \vec{y}\,'$ *est* $\mathbb{T}$*-démontrable.*

(2) *Pour toutes formules* $\varphi(\vec{x})$ *et* $\psi_i(\vec{x}, \vec{y}_i)$, $i \in I$, *on a*

$$\mu_n(\varphi) \le \sum_{i \in I} \mu_n(\psi_i) \quad \text{si } \varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{y}_i)\psi_i(\vec{x}, \vec{y}_i) \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable,}$$

avec égalité si, pour tous indices $i, i' \in I$,

$$\begin{cases} \bullet \quad \psi_i(\vec{x}, \vec{y}_i) \wedge \psi_i(\vec{x}, \vec{y}_i\,') \vdash \vec{y}_i = \vec{y}_{i'} \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable si } i = i', \\ \bullet \quad (\exists\, \vec{y}_i)\psi_i(\vec{x}, \vec{y}_i) \wedge (\exists\, \vec{y}_{i'})\psi_{i'}(\vec{x}, \vec{y}_{i'}) \vdash \perp \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable si } i \neq i'. \end{cases}$$

(3) *Pour toutes formules* φ', φ'' *dans un même contexte* $\vec{x}$, *on a*

$$\mu_n(\varphi') + \mu_n(\varphi'') = \mu_n(\varphi' \wedge \varphi'') + \mu_n(\varphi' \vee \varphi'')\,.$$

Propriétés des mesures moyennes de dénombrements des théories :

Corollaire (suite). –

(4) *Pour tout morphisme* $\psi(\vec{y}) \to \varphi(\vec{x})$ *de* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$
tel qu'existent une famille $J_{\mathbb{T}}$*-couvrante* $(\varphi_k(\vec{x}_k) \to \varphi(\vec{x}))_{k \in K}$
et, pour chaque indice $k \in K$*, une famille de sections*

$$\varphi_k(\vec{x}_k) \longrightarrow \varphi_k(\vec{x}_k) \times_{\varphi(\vec{x})} \psi(\vec{y})\,, \quad i \in I\,,$$

qui est globalement $J_{\mathbb{T}}$*-couvrante et dont les intersections deux à deux sont vides, on a*

$$\mu_n(\psi) = (\# I) \cdot \mu_n(\varphi)\,.$$

(5) *La formule du vrai* $\top$ *en le contexte vide a pour mesure*

$$\mu_n(\top) = 1\,.$$

Limites inférieures et supérieures de statistiques de dénombrements :

- Toute suite de points d'un topos $\mathcal{E}$

$$x_\bullet = (x_n : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E})_{n\in\mathbb{N}}$$

définit une suite de mesures moyennes

$$\mu_n^{x_\bullet} = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{0\leq k\leq n} \delta_{x_k}$$

qui consiste en la suite des applications

$$\begin{array}{rcl} \mu_n^{x_\bullet} : \mathrm{Ob}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_+ \cup \{+\infty\}\,, \\ E & \longmapsto & \frac{1}{n+1} \cdot \sum\limits_{0\leq k\leq n} \#\,(x_k^*(E))\,. \end{array}$$

Définition. – *Pour toute suite de points $x_\bullet = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un topos $\mathcal{E}$,*
on associe à tout objet E de $\mathcal{E}$
les limites inférieures et supérieures dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$$\mu_-^{x_\bullet}(E) = \liminf_{n\mapsto+\infty} \mu_n^{x_\bullet}(E) = \lim_{n\mapsto+\infty} \inf_{k\geq n} \mu_k^{x_\bullet}(E)\,,$$

$$\mu_+^{x_\bullet}(E) = \limsup_{n\mapsto+\infty} \mu_n^{x_\bullet}(E) = \lim_{n\mapsto+\infty} \sup_{k\geq n} \mu_k^{x_\bullet}(E)\,.$$

Remarque. – L'objet terminal 1 de $\mathcal{E}$ et son objet initial $\emptyset$ vérifient

$$\mu_-^{x_\bullet}(1) = \mu_+^{x_\bullet}(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mu_-^{x_\bullet}(\emptyset) = \mu_+^{x_\bullet}(\emptyset) = 0\,.$$

Limites inférieures et supérieures induites :

Définition. –

(i) *Pour tout site $(\mathcal{C}, J)$ et toute suite de points $x_\bullet$ du topos $\widehat{\mathcal{C}}_J$, on note encore*

$$\mu_-^{x_\bullet} \qquad \textit{et} \qquad \mu_+^{x_\bullet}$$

les fonctions

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \quad \textit{ou} \quad \mathrm{Ob}(\widehat{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

déduites de

$$\mu_-^{x_\bullet}, \mu_+^{x_\bullet} : \mathrm{Ob}(\widehat{\mathcal{C}}_J) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

par composition avec les foncteurs

$$\ell : \mathcal{C} \xhookrightarrow{y} \widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J\,.$$

(ii) *En particulier, pour toute suite de modèles $M_\bullet$ d'une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$, on note*

$$\mu_-^{M_\bullet}, \mu_+^{M_\bullet} : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

les fonctions induites par composition avec le foncteur

$$\ell : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \lhook\joinrel\longrightarrow \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}} = \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

de celles associées à $M_\bullet$ interprétée comme une suite de points de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$.

Les mots des statistiques sur les suites de points :

- On choisit un sous-ensemble dense (dénombrable)

$$Q \subset \mathbb{Q}_+ .$$

Définition. – *Pour tout objet E d'un topos $\mathcal{E}$, tout $q \in Q$, et toute suite $(x_\bullet)$ de points de $\mathcal{E}$, on notera*

$$x_\bullet \in P^E_{>q}(\mathcal{E})$$

$$\textit{[resp.} \qquad x_\bullet \in P^E_{<q}(\mathcal{E}) \ \textit{]}$$

si et seulement si on a

$$\mu^{x_\bullet}_{-}(E) > q \qquad \textit{[resp.} \quad \mu^{x_\bullet}_{+}(E) < q \ \textit{].}$$

Remarque. – On a donc

$$x_\bullet \in P^E_{>q}(\mathcal{E}) \qquad \text{[resp.} \quad x_\bullet \in P^E_{<q}(\mathcal{E}) \ \text{]}$$

si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \mu^{x_\bullet}_n(E) \leq q + \varepsilon\}$$

$$\text{[resp.} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid \mu^{x_\bullet}_n(E) \geq q - \varepsilon\} \ \text{]}$$

soit fini.

Statistiques induites sur les sites ou sur les théories :

Définition. –

(i) *Pour tout site $(\mathcal{C}, J)$, tout objet X de $\mathcal{C}$ ou $\widehat{\mathcal{C}}$, tout $q \in Q$, et toute suite $(x_\bullet)$ de points de $\widehat{\mathcal{C}}_J$ c'est-à-dire de foncteurs plats et J-continus*

$$x_n^* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}\,, \quad n \in \mathbb{N} \quad ,$$

on notera

$$x_\bullet \in P^X_{>q}(\mathcal{C}) \qquad \textit{[resp.} \quad x_\bullet \in P^X_{<q}(\mathcal{C}) \textit{]}$$

si et seulement si on a

$$\mu_-^{x_\bullet}(X) > q \qquad \textit{[resp.} \quad \mu_+^{x_\bullet}(X) < q \textit{].}$$

(ii) *En particulier, pour toute théorie géométrique $\mathbb{T}$ de signature Σ, toute formule géométrique φ écrite dans le langage de Σ, tout $q \in Q$, et toute suite $(M_\bullet)$ de modèles de $\mathbb{T}$*

$$M_n = \textit{objet de } \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathrm{Ens}), \quad n \in \mathbb{N},$$

on notera

$$M_\bullet \in P^\varphi_{>q}(\Sigma) \qquad \textit{[resp.} \quad M_\bullet \in P^\varphi_{<q}(\Sigma) \textit{]}$$

si et seulement si on a

$$\mu_-^{M_\bullet}(\varphi) > q \qquad \textit{[resp.} \quad \mu_+^{M_\bullet}(\varphi) < q \textit{].}$$

Le langage propositionnel des statistiques sur les catégories cohérentes :

Rappelons :

Définition. – *Une petite catégorie $\mathcal{C}$ est dite "cohérente" si*

- *elle possède des limites finies arbitraires,*
- *tout morphisme $X' \xrightarrow{u} X$ admet une plus petite factorisation de la forme*

$$X' \longrightarrow \mathrm{Im}(u) \xhookrightarrow[\text{monomorphisme}]{} X \,,$$

et cette factorisation est respectée par les changements de base,

- *les réunions finies de sous-objets des objets X de $\mathcal{C}$ sont toujours bien définies comme sous-objets et elles sont respectées par les changements de base.*

Définition. – *Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie cohérente.*
Le langage propositionnel des statistiques sur $\mathcal{C}$ consiste en la famille de symboles de relations (sans variables)

$$P^X_{>q}(\mathcal{C}) \qquad \text{et} \qquad P^X_{<q}(\mathcal{C})$$

indexés par les objets X de $\mathcal{C}$ et les éléments $q \in Q$.

Le langage propositionnel des statistiques sur les théories :

Définition. – *Soit Σ une signature.*
Le langage propositionnel des statistiques sur Σ
consiste en la famille de symboles de relations (sans variables)

$$P^{\varphi}_{>q}(\Sigma) \qquad et \qquad P^{\varphi}_{<q}(\Sigma)$$

indexés par les formules géométriques φ de Σ et les éléments $q \in \mathbb{Q}$.

Remarques. –

(i) Les formules géométriques φ sont mises sous la forme

$$\varphi = \bigvee_{i \in I} \varphi_i$$

où les φ_i sont des formules "régulières"
(dans lesquelles apparaissent les symboles $\wedge$ et $\exists$ mais pas $\vee$ ou $\bigvee$).
Donc les φ_i prennent leurs valeurs dans un ensemble,
ainsi par conséquent que les formules φ.

(ii) Le langage des statistiques sur Σ
ne dépend pas d'un éventuel choix d'axiomes,
de même que le langage des statistiques sur une catégorie cohérente $\mathcal{C}$
ne dépend pas d'un éventuel choix de topologie J sur $\mathcal{C}$.

Définir des théories des statistiques :

- Si $(\mathcal{C}, J)$ est un site constitué d'une topologie J sur une petite catégorie cohérente Σ, on voudrait définir une

  "théorie des statistiques sur les points du site $(\mathcal{C}, J)$".

  Ce devrait être une théorie géométrique du premier ordre écrite dans le

  "langage propositionnel des statistiques sur $\mathcal{C}$".

- De même, pour toute théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ de signature Σ, on voudrait définir une

  "théorie des statistiques sur les modèles de $\mathbb{T}$".

  Ce devrait être une théorie géométrique du premier ordre écrite dans le

  "langage propositionnel des statistiques sur Σ".

Les axiomes de filtration :

Définition. – *Soit une petite catégorie cohérente* $\mathcal{C}$ *munie d'une topologie* J. *On considère le langage propositionnel des statistiques sur* $\mathcal{C}$, *constitué des symboles de relations sans variables*

$$P^X_{>q} \quad \text{et} \quad P^X_{<q}\,, \qquad X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\,, \quad q \in Q\,.$$

Les axiomes de filtration sur ce langage sont

$$P^X_{>q} \vdash P^X_{>q'} \quad \text{pour tous } \; q' < q\,,$$

$$P^X_{<q} \vdash P^X_{<q'} \quad \text{pour tous } \; q < q'\,.$$

Définition. – *Soit une théorie géométrique du premier ordre* $\mathbb{T}$ *de signature* Σ. *On considère le langage propositionnel des statistiques sur* Σ, *constitué des symboles de relations sans variables*

$$P^\varphi_{>q} \quad \text{et} \quad P^\varphi_{<q}\,, \qquad \varphi \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\Sigma) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\mathbb{T})\,, \quad q \in Q\,.$$

Les axiomes de filtration sur ce langage sont

$$P^\varphi_{>q} \vdash P^\varphi_{>q'} \quad \text{pour tous } \; q' < q\,,$$

$$P^\varphi_{<q} \vdash P^\varphi_{<q'} \quad \text{pour tous } \; q < q'\,.$$

Les axiomes d'exclusion :

Définition. –
*Soit le langage propositionnel des statistiques sur une petite catégorie cohérente $\mathcal{C}$ munie d'une topologie J.
Dans ce cadre, les axiomes d'exclusion sont*

$$P^X_{>q} \wedge P^X_{<q} \vdash \perp \text{ pour tout objet } X \text{ et tout élément } q \in Q.$$

Remarque. – Combinés avec les axiomes de filtrations, ils impliquent

$$P^X_{>q} \wedge P^X_{<q'} \vdash \perp \text{ pour tous } q \geq q'.$$

Définition. –
*Soit le langage propositionnel des statistiques sur une théorie géométrique $\mathbb{T}$ de signature Σ.
Dans ce cadre, les axiomes d'exclusion sont*

$$P^\varphi_{>q} \wedge P^\varphi_{<q} \vdash \perp \text{ pour toute formule géométrique } \varphi \text{ et tout élément } q \in Q.$$

Remarque. – De même, ils induisent

$$P^\varphi_{>q} \wedge P^\varphi_{<q'} \vdash \perp \text{ pour tous } q \geq q'.$$

Les axiomes de convergence des moyennes de dénombrements :

Définition. –
Soit le langage propositionnel des statistiques sur une petite catégorie cohérente $\mathcal{C}$ munie d'une topologie J.
Dans ce cadre, les axiomes de convergence des moyennes de dénombrements sont

$$\top \vdash P^X_{>q} \vee P^X_{<q'} \text{ pour tout objet } X \text{ et tous } q < q' .$$

Définition. –
Soit le langage propositionnel des statistiques sur une théorie géométrique $\mathbb{T}$ de signature Σ.
Dans ce cadre, les axiomes de convergence des moyennes de dénombrements sont

$$\top \vdash P^\varphi_{>q} \vee P^\varphi_{<q'} \text{ pour toute formule géométrique } \varphi \text{ et tous } q < q' .$$

Les axiomes des monomorphismes :

Définition. –
Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques sur une petite catégorie cohérente $\mathcal{C}$ munie d'une topologie J, les axiomes des monomorphismes sont

$$P^{X'}_{>q} \vdash P^{X}_{>q}$$

et

$$P^{X}_{<q} \vdash P^{X'}_{<q}$$

pour tout élément $q \in Q$ et tout monomorphisme de $\mathcal{C}$

$$X' \hookrightarrow X$$

ou, plus généralement, pour tout morphisme de $\mathcal{C}$

$$X' \longrightarrow X$$

dont le morphisme diagonal associé

$$X' \longrightarrow X' \times_X X'$$

est J-couvrant.

Les axiomes des implications :

Définition. – *Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques sur une théorie géométrique* $\mathbb{T}$ *de signature* Σ,
les axiomes des implications sont

$$P^{\psi}_{>q} \vdash P^{\varphi}_{>q} \qquad \text{et} \qquad P^{\varphi}_{<q} \vdash P^{\psi}_{<q}$$

pour tout $q \in Q$ *et toutes formules géométriques*

$$\varphi \qquad \text{et} \qquad \psi$$

vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

- *ou bien* φ *et* ψ *ont le même contexte* $\vec{x}$ *et l'implication*
$$\psi \vdash_{\vec{x}} \varphi$$
est $\mathbb{T}$*-démontrable,*
- *ou bien* φ *et* ψ *ont des contextes disjoints* $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ *et sont reliés par une formule géométrique* $\mathbb{T}$*-démontrablement fonctionnelle*
$$\psi(\vec{y}) \xrightarrow{\theta(\vec{y},\vec{x})} \varphi(\vec{x})$$
telle que l'implication
$$\theta(\vec{y},\vec{x}) \wedge \theta(\vec{y}\,',\vec{x}) \vdash \vec{y} = \vec{y}\,'$$
est $\mathbb{T}$*-démontrable.*

Les axiomes des images :

Définition. – *Supposons que la petite catégorie cohérente* $\mathcal{C}$ *est munie d'une topologie* J *pour laquelle tout morphisme d'image maximale*

$$X' \xrightarrow{u} X = \mathrm{Im}(u)$$

est J*-couvrant.*
Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques sur $\mathcal{C}$*,*
les axiomes des images sont

$$P^X_{>q} \vdash P^{X'}_{>q}$$

et

$$P^{X'}_{<q} \vdash P^X_{<q}$$

pour tout élément $q \in Q$
et tout morphisme de $\mathcal{C}$

$$X' \xrightarrow{u} X = \mathrm{Im}(u)$$

dont l'image est maximale
ou, plus généralement, qui est J*-couvrant.*

Les axiomes des quantifications existentielles :

Définition. –
Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques
sur une théorie géométrique $\mathbb{T}$ *de signature* Σ,
les axiomes des quantifications existentielles sont

$$P^{\varphi}_{>q} \vdash P^{\theta}_{>q}$$

et

$$P^{\theta}_{<q} \vdash P^{\varphi}_{<q}$$

pour tout élément $q \in Q$
et toutes formules géométriques

$$\varphi(\vec{x}) \qquad et \qquad \theta(\vec{x}, \vec{y})$$

dans des contextes disjoints $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$
telle que l'implication

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} (\exists\, \vec{y})\theta(\vec{x}, \vec{y})$$

soit $\mathbb{T}$*-démontrable.*

Le lemme des isomorphismes :

Lemme. –
Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques sur une petite catégorie cohérente $\mathcal{C}$ *munie d'une topologie* J*, les axiomes des monomorphismes et des images entraînent les équivalences*

$$P_{>q}^{X'} \dashv\vdash P_{>q}^{X}$$

et

$$P_{<q}^{X'} \dashv\vdash P_{<q}^{X}$$

pour tout élément $q \in Q$
et tous objets X, X' *de* $\mathcal{C}$
reliés par un morphisme

$$X' \longrightarrow X$$

qui est J*-couvrant ainsi que le morphisme diagonal*

$$X' \longrightarrow X' \times_X X' \,.$$

Le lemme des équivalences :

Lemme. – *Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques sur une théorie géométrique* $\mathbb{T}$ *de signature* Σ*,*
les axiomes des implications et des quantifications existentielles entaînent les équivalences

$$P^{\varphi}_{>q} \dashv\vdash P^{\psi}_{>q}$$

et

$$P^{\varphi}_{<q} \dashv\vdash P^{\psi}_{<q}$$

pour tout élément $q \in Q$
et toutes formules géométriques $\varphi(\vec{x})$ *et* $\psi(\vec{y})$ *de* Σ
dans des contextes disjoints $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$*,*
reliées par une formule $\mathbb{T}$*-démontrablement fonctionnelle*

$$\psi(\vec{y}) \xrightarrow{\theta(\vec{y},\vec{x})} \varphi(\vec{x})$$

telles que les deux implications

$$\theta(\vec{y},\vec{x}) \wedge \theta(\vec{y}\,',\vec{x}) \vdash \vec{y} = \vec{y}\,',$$

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} (\exists\, \vec{y})\theta(\vec{x},\vec{y})$$

soient $\mathbb{T}$*-démontrables.*

Les axiomes d'additivité pour les catégories cohérentes :

Définition. –
Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques sur une petite catégorie cohérente $\mathcal{C}$*,*
les axiomes d'additivité sont, pour tout objet X *de* $\mathcal{C}$*,*

- *si* $\emptyset_X$ *désigne le plus petit sous-objet de* X*,*

  $$\top \vdash P^{\emptyset_X}_{<q}$$

  pour tout $q > 0$*,*
- *si* $X' \hookrightarrow X$ *et* $X'' \hookrightarrow X$ *sont deux sous-objets de* X*,*

  $$P^{X'}_{<q_1} \wedge P^{X''}_{<q_2} \wedge P^{X' \wedge X''}_{>q_3} \vdash P^{X' \vee X''}_{<q_4}$$

  si $q_4 \geq q_1 + q_2 - q_3$*, et*

  $$P^{X'}_{>q_1} \wedge P^{X''}_{>q_2} \wedge P^{X' \wedge X''}_{<q_3} \vdash P^{X' \vee X''}_{>q_4}$$

  si $q_4 \leq q_1 + q_2 - q_3$*.*

Les axiomes d'additivité pour les théories géométriques :

Définition. –
Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques sur une théorie géométrique $\mathbb{T}$ *de signature* Σ*, les axiomes d'additivité sont, pour tout contexte* $\vec{x}$*,*

- *si* $\perp$ *désigne la formule du faux dans le contexte* $\vec{x}$*,*

$$\top \vdash P^{\perp}_{<q}$$

pour tout $q > 0$*,*

- *si* φ *et* ψ *sont deux formules géométriques de contexte* $\vec{x}$*,*

$$P^{\varphi}_{<q_1} \wedge P^{\psi}_{<q_2} \wedge P^{\varphi \wedge \psi}_{>q_3} \vdash P^{\varphi \vee \psi}_{<q_4}$$

si $q_4 \geq q_1 + q_2 - q_3$*, et*

$$P^{\varphi}_{>q_1} \wedge P^{\psi}_{>q_2} \wedge P^{\varphi \wedge \psi}_{<q_3} \vdash P^{\varphi \vee \psi}_{>q_4}$$

si $q_4 \leq q_1 + q_2 - q_3$*.*

Le lemme des recouvrements finis :

On déduit de l'axiome d'additivité combiné avec celui des images et celui des monomorphismes :

Lemme. – *Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques sur une petite catégorie cohérente* $\mathcal{C}$ *munie d'une topologie* J*, on a :*

(i) Pour toute famille finie J*-couvrante de morphismes*

$$(X_i \longrightarrow X)_{1 \leq i \leq k}\,,$$

on a des implications

$$P^{X_1}_{<q_1} \wedge \cdots \wedge P^{X_k}_{<q_k} \vdash P^{X}_{<q}$$

pour tous $q \geq q_1 + \cdots + q_k$*.*

(ii) Si de plus les $X_i \to X$, $1 \leq i \leq k$*, sont des monomorphismes et les produits fibrés*

$$X_i \times_X X_j\,, \quad i \neq j\,,$$

admettent pour J*-recouvrement la famille vide, on a des implications*

$$P^{X_1}_{>q_1} \wedge \cdots \wedge P^{X_k}_{>q_k} \vdash P^{X}_{>q}$$

pour tous $q \leq q_1 + \cdots + q_k$*.*

Les axiomes des recouvrements filtrants :

Définition. –
Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques sur une petite catégorie cohérente $\mathcal{C}$ *munie d'une topologie* J*, les axiomes des recouvrements filtrants sont*

- *pour toute famille filtrante de sous-objets*

$$(X_i \hookrightarrow X)_{i \in I}$$

qui est J*-couvrante, les implications*

$$P^X_{>q} \vdash \bigvee_{i \in I} P^{X_i}_{>q}$$

pour tout élément $q \in Q$*.*

Remarque. – En sens inverse, on a

$$P^{X_i}_{>q} \vdash P^X_{>q}$$

pour tout q et tout $i \in I$,
puisque chaque X_i est un sous-objet de X.

Les axiomes des disjonctions :

Définition. – *Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques sur une théorie géométrique* $\mathbb{T}$ *de signature* Σ*,*
les axiomes des disjonctions sont

- *les implications*

$$P_{>q}^{\varphi} \vdash \bigvee_{i_1,\cdots,i_k \in I} P_{>q}^{\varphi_{i_1} \vee \cdots \vee \varphi_{i_k}}$$

pour tout $q \in Q$*,*
et pour toute famille de formules géométriques $(\varphi_i)_{i \in I}$
dans un même contexte $\vec{x}$*,*
de disjonction

$$\varphi = \bigvee_{i \in I} \varphi_i \,.$$

Remarque. – En sens inverse, on a

$$P_{>q}^{\varphi_{i_1} \vee \cdots \vee \varphi_{i_k}} \vdash P_{>q}^{\varphi}$$

pour tout q et tous $i_1, \cdots, i_k \in I$,
puisque chaque $\varphi_{i_1} \vee \cdots \vee \varphi_{i_k}$ implique φ.

Le lemme des recouvrements arbitraires :

On déduit de l'axiome d'additivité combiné avec celui des images et celui des recouvrements filtrants :

Lemme. – *Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques sur une petite catégorie cohérente $\mathcal{C}$ munie d'une topologie J, on a, pour toute famille J-couvrante de morphismes*

$$(X_i \longrightarrow X)_{i \in I}\,,$$

des implications

$$P^X_{>q} \vdash \bigvee_{\substack{i_1, \cdots, i_k \in I \\ q_1 + \cdots + q_k \geq q}} P^{X_{i_1}}_{>q_1} \wedge \cdots \wedge P^{X_{i_k}}_{>q_k}\,.$$

Remarque. – Si de plus les $X_i \to X$, $i \in I$, sont des monomorphismes et les produits fibrés $X_i \times_X X_j$, $i \neq j$, admettent pour J-recouvrement la famille vide, on a les implications

$$P^{X_{i_1}}_{>q_1} \wedge \cdots \wedge P^{X_{i_k}}_{>q_k} \vdash P^X_{>q}$$

pour tous $i_1, \cdots, i_k \in I$ et $q \leq q_1 + \cdots + q_k$.

Les axiomes des revêtements d'une catégorie cohérente :

Définition. – *Dans le cadre du <u>langage propositionnel des statistiques</u> sur une <u>petite catégorie cohérente</u> $\mathcal{C}$ munie d'une <u>topologie</u> J, les <u>axiomes des revêtements</u> prennent la forme suivante :*

- *Pour tout morphisme de $\mathcal{C}$*

$$X' \longrightarrow X$$

tel qu'existent un <u>ensemble</u> I et une <u>famille</u> J-<u>couvrante</u>

$$(X_k \longrightarrow X)_{k \in K}$$

telle que chaque <u>produit fibré</u> $X_k \times_X X'$ au-dessus de X_k admette des <u>sections</u> $s_i : X_k \to X_k \times_X X'$ indexées par les $i \in I$ et telles que

$$\begin{cases} - & \text{les } s_i,\ i \in I, \text{ forment une famille } J\text{-couvrante,} \\ - & \text{chaque } s_i \times_{(X_k \times_X X')} s_j,\ i \neq j, \text{ admet pour } J\text{-recouvrement} \\ & \text{la famille vide,} \end{cases}$$

on pose les <u>implications</u>

$$P^X_{>q} \vdash P^{X'}_{>q'} \quad \text{si} \quad q' \leq (\# I) \cdot q$$

$$\text{et} \quad P^X_{<q} \vdash P^{X'}_{<q'} \quad \text{si} \quad q' \geq (\# I) \cdot q\,.$$

Les axiomes des revêtements d'une théorie géométrique :

Définition. – *Dans le cadre du langage propositionnel des statistiques sur une théorie géométrique $\mathbb{T}$ de signature Σ, les axiomes des revêtements prennent la forme suivante :*

- *On pose les implications*

$$\begin{array}{rl} & P^{\psi}_{>q} \vdash P^{\varphi}_{>q'} \quad si \quad q' \leq (\# I) \cdot q \\ et & P^{\psi}_{<q} \vdash P^{\varphi}_{<q'} \quad si \quad q' \geq (\# I) \cdot q \end{array}$$

pour toute formule $\mathbb{T}$-démontrablement fonctionnelle

$$\varphi(\vec{x}) \xrightarrow{\theta(\vec{x},\vec{y})} \psi(\vec{y})$$

et tout ensemble I tels qu'existent des formules $\mathbb{T}$-démontrablement fonctionnelles

$$\psi_k(\vec{y}_k) \xrightarrow{\theta_k(\vec{y}_k,\vec{y})} \psi(\vec{y}), \quad k \in K, \quad avec \quad \psi \vdash_{\vec{y}} \bigvee_{k \in K} (\exists\, \vec{y}_k)\theta_k(\vec{y}_k, \vec{y}),$$

et des décompositions

$$(\exists\, \vec{y})(\theta(\vec{x},\vec{y}) \wedge \theta_k(\vec{y}_k,\vec{y})) \dashv\vdash \bigvee_{i \in I} \varphi_{i,k}(\vec{x},\vec{y}_k)$$

$$avec \begin{cases} \varphi_{i,k}(\vec{x},\vec{y}_k) \wedge \varphi_{j,k}(\vec{x},\vec{y}_k) \vdash \perp \quad si\ i \neq j, \\ \varphi_{i,k}(\vec{x},\vec{y}_k) \wedge \varphi_{i,k}(\vec{x}\,',\vec{y}_k) \vdash \vec{x} = \vec{x}\,', \\ \psi(\vec{y}_k) \vdash (\exists\, \vec{x})\, \varphi_{i,k}(\vec{x},\vec{y}_k). \end{cases}$$

Théorie des statistiques sur une petite catégorie cohérente : langage

Définition. – Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie, supposée cohérente au sens que

$$\begin{cases} \bullet & \text{elle possède des limites finies arbitraires,} \\ \bullet & \text{tout morphisme } X' \xrightarrow{u} X \text{ admet une image } X' \to \mathrm{Im}(u) \hookrightarrow X' \\ & \text{respectée par changement de base,} \\ \bullet & \text{les réunions finies de sous-objets sont bien définies,} \\ & \text{et respectées par changements de base.} \end{cases}$$

Soit J une topologie de $\mathcal{C}$ telle que

$$\begin{cases} \bullet & \text{les morphismes images } X' \xrightarrow{u} X = \mathrm{Im}(u) \text{ sont } J\text{-couvrants,} \\ \bullet & \text{les réunions finies de sous-objets sont couvertes par leurs éléments.} \end{cases}$$

Soit $Q \subset \mathbb{R}_+$ une partie dense.

Alors :

(i) Le langage propositionnel des statistiques sur $\mathcal{C}$
consiste en les symboles de relations (sans variables)

$$P^X_{>q} \qquad \text{et} \qquad P^X_{<q}\,,$$

$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $q \in Q$.

Théorie des statistiques sur une catégorie cohérente : axiomes

Définition (suite). –
(ii) La théorie des statistiques sur $(\mathcal{C}, J)$,
écrite dans le langage propositionnel des $P^X_{>q}$ et $P^X_{<q}$,
est définie par les axiomes suivants :

- *Les axiomes de filtration*

$$P^X_{>q} \vdash P^X_{>q'} \quad \text{si } q' < q,$$
$$P^X_{<q} \vdash P^X_{<q'} \quad \text{si } q < q'.$$

- *Les axiomes d'exclusion*

$$P^X_{>q} \wedge P^X_{<q} \vdash \bot.$$

- *Les axiomes de convergence*

$$\top \vdash P^X_{>q} \vee P^X_{<q'} \quad \text{si } q < q'.$$

- *Les axiomes des monomorphismes*

$$P^{X'}_{>q} \vdash P^X_{>q} \quad \text{et} \quad P^X_{<q} \vdash P^{X'}_{<q}$$

pour tout morphisme $X' \to X$ qui est un monomorphisme ou plus généralement a un morphisme diagonal associé

$$X' \longrightarrow X' \times_X X'$$

qui est J-couvrant.

Théorie des statistiques sur une catégorie cohérente : axiomes

Définition (suite des axiomes). –

- *Les axiomes des images*

$$P^X_{>q} \vdash P^{X'}_{>q} \qquad \text{et} \qquad P^{X'}_{<q} \vdash P^X_{<q}$$

si $X' \xrightarrow{u} X$ est un morphisme image $X' \xrightarrow{u} X = \mathrm{Im}(u)$ ou plus généralement est J-couvrant.

- *Les axiomes d'additivité*

$$\begin{aligned} P^{X'}_{<q_1} \wedge P^{X''}_{<q_2} \wedge P^{X' \wedge X''}_{>q_3} &\vdash P^{X' \vee X''}_{<q_4} \qquad \text{si } q_4 \geq q_1 + q_2 - q_3, \\ P^{X'}_{>q_1} \wedge P^{X''}_{>q_2} \wedge P^{X' \wedge X''}_{<q_3} &\vdash P^{X' \vee X''}_{>q_4} \qquad \text{si } q_4 \leq q_1 + q_2 - q_3, \end{aligned}$$

pour tous sous-objets $X' \hookrightarrow X$, $X'' \hookrightarrow X$ d'un objet X.

- *Les axiomes des recouvrements filtrants*

$$P^X_{>q} \vdash \bigvee_{i \in I} P^{X_i}_{>q} \quad \text{pour tout } \ q \in Q,$$

si

$$(X_i \hookrightarrow X)_{i \in I}$$

est une famille filtrante et J-couvrante de sous-objets d'un objet X.

Théorie des statistiques sur une catégorie cohérente : axiomes

Définition (fin des axiomes). –
• *Les axiomes des revêtements*

$$P^X_{>q} \vdash P^{X'}_{>q'} \quad \text{si } q' \leq (\# I) \cdot q,$$
$$P^X_{<q} \vdash P^{X'}_{<q'} \quad \text{si } q' \geq (\# I) \cdot q$$

pour tout morphisme $X' \to X$
tel qu'existent un ensemble I*, une famille* J*-couvrante* $\quad (X_k \longrightarrow X)_{k \in K}$
et des sections $\quad s_i : X_k \longrightarrow X_k \times_X X'\,, \quad i \in I\,,$
qui induisent des décompositions dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$

$$\ell(X_k \times_X X') \cong \coprod_{i \in I} \ell(X_k)\,.$$

Remarques. –
(i) On peut éventuellement ajouter les axiomes des mesures de probabilités

$$\top \vdash P^1_{>q} \quad \text{si} \quad q < 1 \qquad \text{et} \qquad \top \vdash P^1_{<q} \quad \text{si} \quad q > 1,$$

si 1 désigne l'objet terminal de $\mathcal{C}$.
(ii) Les seuls axiomes qui dépendent du choix de la topologie J sont

- les axiomes des images,
- les axiomes des recouvrements filtrants,
- les axiomes des revêtements.

Théorie des statistiques sur des propriétés géométriques : langage

Définition. –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre, écrite dans une signature Σ.

Soit $Q \subset \mathbb{R}_+$ une partie dense.

Alors :

(i) Le langage propositionnel des statistiques sur Σ consiste en les symboles de relations (sans variables)

$$P^{\varphi}_{>q} \qquad \text{et} \qquad P^{\varphi}_{<q}$$

où φ décrit l'ensemble des formules géométriques de Σ
(écrites sous forme de disjonctions de formules régulières)
et $q \in Q$.

Théorie des statistiques sur des propriétés : axiomes

Définition (suite). –
(ii) La théorie des statistiques sur $\mathbb{T}$,
écrite dans le langage propositionnel des $P^{\varphi}_{>q}$ et $P^{\varphi}_{<q}$,
est définie par les axiomes suivants :

- *Les axiomes de filtration*

$$P^{\varphi}_{>q} \vdash P^{\varphi}_{>q'} \quad \text{si } q' < q,$$
$$P^{\varphi}_{<q} \vdash P^{\varphi}_{<q'} \quad \text{si } q < q'.$$

- *Les axiomes d'exclusion*

$$P^{\varphi}_{>q} \wedge P^{\varphi}_{<q} \vdash \perp.$$

- *Les axiomes de convergence*

$$\top \vdash P^{\varphi}_{>q} \vee P^{\varphi}_{<q'} \quad \text{si } q < q'.$$

- *Les axiomes des implications*

$$P^{\psi}_{>q} \vdash P^{\varphi}_{>q} \quad \text{et} \quad P^{\varphi}_{<q} \vdash P^{\psi}_{<q}$$

si

- *ou bien φ et ψ ont le même contexte $\vec{x}$ et $\psi \vdash \varphi$,*
- *ou bien φ et ψ ont des contextes disjoints $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et sont reliés par $\psi(\vec{x}) \xrightarrow{\theta(\vec{y},\vec{x})} \varphi(\vec{x})$ tels que*

$$\theta(\vec{y},\vec{x}) \wedge \theta(\vec{y}\,',\vec{x}) \vdash \vec{y} = \vec{y}\,' .$$

Théorie des statistiques sur des propriétés : axiomes

Définition (suite). –

• *Les* <u>*axiomes des quantifications existentielles*</u>

$$P^{\varphi}_{>q} \vdash P^{\theta}_{>q} \qquad \text{et} \qquad P^{\theta}_{<q} \vdash P^{\varphi}_{<q}$$

pour des formules géométriques $\varphi(\vec{x})$ *et* $\theta(\vec{x},\vec{y})$ *telles que*

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} (\exists\, \vec{y})\, \theta(\vec{x},\vec{y})\,.$$

• *Les* <u>*axiomes d'additivité*</u>

$$P^{\varphi}_{<q_1} \wedge P^{\psi}_{<q_2} \wedge P^{\varphi\wedge\psi}_{>q_3} \vdash P^{\varphi\vee\psi}_{<q_4} \qquad \text{si } q_4 \geq q_1 + q_2 - q_3,$$

$$P^{\varphi}_{>q_1} \wedge P^{\psi}_{>q_2} \wedge P^{\varphi\wedge\psi}_{<q_3} \mapsto P^{\varphi\vee\psi}_{>q_4} \qquad \text{si } q_4 \leq q_1 + q_2 - q_3,$$

pour des <u>*formules géométriques*</u> φ, ψ *de* <u>*même contexte*</u> $\vec{x}$*.*

• *Les* <u>*axiomes des disjonctions*</u>

$$P^{\varphi}_{>q} \vdash \bigvee_{i_1,\cdots,i_k \in I} P^{\varphi_1\vee\cdots\vee\varphi_k}_{>q}$$

pour toute <u>*famille de formules géométriques*</u> $(\varphi_i)_{i\in I}$
dans un <u>*même contexte*</u> $\vec{x}$*, de* <u>*disjonction*</u>

$$\varphi = \bigvee_{i\in I} \varphi_i\,.$$

Théorie des statistiques sur des propriétés : axiomes

Définition (fin des axiomes). –

• *Les axiomes de revêtements*

$$P^{\varphi}_{>q} \vdash P^{\psi}_{>q'} \quad \text{si } q' \leq (\# I) \cdot q,$$
$$P^{\varphi}_{<q} \vdash P^{\psi}_{<q'} \quad \text{si } q' \geq (\# I) \cdot q,$$

si φ et ψ sont reliées par une formule $\mathbb{T}$-fonctionnelle

$$\varphi(\vec{x}) \xrightarrow{\theta(\vec{x},\vec{y})} \psi(\vec{y}),$$

et I est un ensemble tels qu'existent des formules $\mathbb{T}$-fonctionnelles

$$\psi_k(\vec{y}_k) \xrightarrow{\theta_k(\vec{y}_k,\vec{y})} \psi(\vec{y}), \quad k \in K, \quad \text{avec} \quad \psi \vdash_{\vec{y}} \bigvee_{k \in K} (\exists\, \vec{y}_k)\theta_k(\vec{y}_k,\vec{y}),$$

et des décompositions

$$(\exists\, \vec{y})(\theta(\vec{x},\vec{y}) \wedge \theta_k(\vec{y}_k,\vec{y})) \dashv\vdash \bigvee_{i \in I} \varphi_{i,k}(\vec{x},\vec{y}_k)$$

$$\text{avec} \begin{cases} \varphi_{i,k}(\vec{x},\vec{y}_k) \wedge \varphi_{j,k}(\vec{x},\vec{y}_k) \vdash \bot \quad \text{si } i \neq j, \\ \varphi_{i,k}(\vec{x},\vec{y}_k) \wedge \varphi_{i,k}(\vec{x}',\vec{y}_k) \vdash \vec{x} = \vec{x}', \\ \psi(\vec{y}_k) \vdash (\exists\, \vec{x})\, \varphi_{i,k}(\vec{x},\vec{y}_k). \end{cases}$$

• *Les axiomes de mesures de probabilités*

$$\top \vdash P^{\top}_{>q} \quad \text{si} \quad q < 1 \qquad \text{et} \qquad \top \vdash P^{\top}_{<q} \quad \text{si} \quad q > 1,$$

si $\top$ désigne le symbole du vrai sans variables.

Le topos localique des mesures sur une catégorie cohérente :

Définition. –
Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie cohérente, munie d'une topologie J pour laquelle les morphismes $X \xrightarrow{u} \mathrm{Im}(u)$ sont J-couvrants et les réunions finies sont J-couvrantes.
Soit $Q \subseteq \mathbb{R}_+$ une partie dense.
(i) On notera

$$\mathrm{Mes}_{\mathcal{C},J}$$

la théorie propositionnelle des statistiques sur $(\mathcal{C}, J)$, écrite dans le langage constitué des symboles de relations (sans variables)

$$P^X_{>q} \quad \text{et} \quad P^X_{<q}\,, \qquad X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\,, \quad q \in Q\,.$$

(ii) On notera

$$\mathcal{E}^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$$

le "topos classifiant" de cette théorie.
(iii) On notera

$$O^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$$

l'ensemble partiellement ordonné des sous-objets de l'objet terminal du topos $\mathcal{E}^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$.

Le “lieu” (ou “locale”) des mesures sur une catégorie cohérente :

• La théorie des mesures sur $(\mathcal{C}, J)$

$$\mathrm{Mes}_{\mathcal{C},J}$$

est une théorie propositionnelle.

• Par conséquent, son topos classifiant

$$\mathcal{E}^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$$

est “localique”.

• Il s’écrit comme les topos des faisceaux
sur le “lieu”

$$O^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$$

muni de

$$\left\{\begin{array}{l}\text{sa relation d'ordre partiel,}\\ \text{son opérateur de passage aux sup arbitraires } \bigvee\\ \qquad \text{qui définit sa topologie,}\\ \text{son opérateur de passage aux inf finis } \wedge\\ \qquad \text{qui est distributif par rapport à } \bigvee.\end{array}\right.$$

Description du “lieu” des mesures sur une catégorie cohérente :

• Tout élément de langage de la théorie $\mathrm{Mes}_{\mathcal{C},J}$

$$P^X_{>q} \quad \text{ou} \quad P^X_{<q}\,, \quad q \in Q\,, \quad X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\,,$$

définit un élément

$$\ell(P^X_{>q}) \qquad \text{ou} \qquad \ell(P^X_{<q})$$

de l’ensemble ordonné $O^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$.

• Réciproquement, tout élément de l’ensemble

$$O^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$$

s’écrit comme une réunion $\bigvee$ d’intersections finies $\wedge$ d’éléments de la forme

$$\ell(P^X_{>q}) \qquad \text{ou} \qquad \ell(P^X_{<q})\,.$$

• La relation d’ordre et les relations d’égalité dans

$$O^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$$

sont celles qui se déduisent des axiomes de $\mathrm{Mes}_{\mathcal{C},J}$ en utilisant

- l’associativité des opérateurs $\wedge$ et $\bigvee$,
- la distributivité de $\wedge$ par rapport à $\bigvee$,
- les relations de définitions réciproques entre $\leq$, $\wedge$ et $\bigvee$.

Les axiomes de définition du “lieu” des mesures :

Dans l’ensemble ordonné $O_{\mathcal{C},J}^{\mathrm{mes}}$
constitué des réunions $\bigvee$ d’intersections finies $\wedge$
de symboles

$$P_{>q}^{X} \quad \text{ou} \quad P_{<q}^{X}\,, \qquad q \in Q\,, \quad X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\,,$$

les relations d’égalité et d’inégalité
sont celles qui se déduisent des règles suivantes :

- Filtration :
$$P_{>q}^{X} \leq P_{<q'}^{X} \quad \text{si } q' < q$$
$$P_{<q}^{X} \leq P_{<q'}^{X} \quad \text{si } q < q'.$$
- Exclusion :
$$P_{>q}^{X} \wedge P_{<q}^{X} = \emptyset.$$
- Convergence :
$$P_{>q}^{X} \vee P_{<q'}^{X} = 1 \quad \text{si } q < q'.$$
- Monomorphismes :
$$P_{>q}^{X'} \leq P_{>q}^{X} \quad \text{et} \quad P_{<q}^{X} \leq P_{<q}^{X'}$$

si X et X' sont reliés par un morphisme $X' \to X$
tel que $X' \to X' \times_X X'$ soit J-couvrant.

Les axiomes de définition du “lieu” des mesures (suite) :

• Règle des images :

$$P^X_{>q} \leq P^{X'}_{>q} \qquad \text{et} \qquad P^{X'}_{<q} \leq P^X_{<q}$$

si X et X' sont reliés par un morphisme $X' \to X$ qui est J-couvrant.

• Additivité :

Pour tous sous-objets X', X'' d'un objet X de $\mathcal{C}$,

$$P^{X'}_{<q_1} \wedge P^{X''}_{<q_2} \wedge P^{X' \wedge X''}_{>q_3} \leq P^{X' \vee X''}_{<q_4} \quad \text{si } q_4 \geq q_1 + q_2 - q_3,$$
$$P^{X'}_{>q_1} \wedge P^{X''}_{>q_2} \wedge P^{X' \wedge X''}_{<q_3} \leq P^{X' \vee X''}_{>q_4} \quad \text{si } q_4 \leq q_1 + q_2 - q_3.$$

• Recouvrements filtrants :

Pour toute famille de sous-objets $(X_i \hookrightarrow X)_{i \in I}$ qui est filtrante et J-couvrante,

$$P^X_{>q} = \bigvee_{i \in I} P^{X_i}_{>q}\,.$$

• Revêtements :

Pour tout morphisme $X' \to X$ qui est J-localement sur X de la forme $\coprod_{i \in I} X \to X$,

$$P^X_{>q} \leq P^{X'}_{>q'} \quad \text{si } q' \leq (\# I) \cdot q,$$
$$P^X_{<q} \leq P^{X'}_{<q'} \quad \text{si } q' \geq (\# I) \cdot q.$$

Les axiomes de définition du “lieu” des mesures (fin) :

• Axiomes des “lois de probabilités” (à ajouter éventuellement) :

$$P^1_{>q} = 1 \quad \text{si} \quad q < 1 \qquad \text{et} \qquad P^1_{<q} = 1 \quad \text{si} \quad q > 1 \,.$$

• Pour s’assurer que le topos localique $\mathcal{E}^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$
qui classifie la théorie $\mathrm{Mes}_{\mathcal{C},J}$ des mesures sur $(\mathcal{C}, J)$
et son lieu de définition $O^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$
ne dépendent pas du choix de la partie dense

$$Q \subseteq \mathbb{R}_+ \,,$$

on a besoin d’ajouter :

Définition. – *On ajoute à la théorie* $\mathrm{Mes}_{\mathcal{C},J}$ *les “axiomes de densité”*

$$P^X_{>q} \vdash \bigvee_{q'>q} P^X_{>q'} \,, \qquad P^X_{<q} \vdash \bigvee_{q'<q} P^X_{<q'}$$

pour tout objet X *de* $\mathcal{C}$ *et tout* $q \in Q$.

Remarque. – Dans $O^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$, on a donc encore les égalités

$$P^X_{>q} = \bigvee_{q'>q} P^X_{>q'} \qquad \text{et} \qquad P^X_{<q} = \bigvee_{q'<q} P^X_{<q'} \,.$$

Les mesures comme points du topos des mesures :

Proposition. –

Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie cohérente munie d'une topologie J pour laquelle les morphismes $X \xrightarrow{u} \mathrm{Im}(u)$ sont J-couvrants, ainsi que les réunions finies.

Alors il revient au même de se donner

(1) *un modèle ensembliste de la théorie propositionnelle* $\mathrm{Mes}_{\mathcal{C},J}$,

(2) *un point* μ *du topos localique* $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}^{\mathrm{mes}}$,

(3) *une topologie* J_μ *sur le lieu* $O_{\mathcal{C},J}^{\mathrm{mes}}$ *qui soit plus fine que celle définie par les réunions* $\bigvee$ *et qui définisse un sous-topos "bivalent" de* $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}^{\mathrm{mes}}$,

(4) $\cdots$

Les mesures comme points du topos des mesures :

Proposition (suite). – *Il revient au même de se donner*

(1) $\cdots$,

(2) *un point* μ *du topos localique* $\mathcal{E}^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$,

(3) $\cdots$

(4) *une "mesure" sur* $(\mathcal{C}, J)$ *c'est-à-dire une application*

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ X & \longmapsto & \mu(X) \end{array}$$

telle que

- $\mu(X) \geq \mu(X')$ *si* X *et* X' *sont reliés par un morphisme* $X' \to X$ *tel que* $X' \to X' \times_X X'$ *soit* J-*couvrant,*
- $\mu(X) \leq \mu(X')$ *si* X *et* X' *sont reliés par un morphisme* $X' \to X$ *qui soit* J-*couvrant,*
- *pour tous sous-objets* X', X'' *d'un objet* X *de* $\mathcal{C}$,
$$\mu(X') + \mu(X'') = \mu(X' \wedge X'') + \mu(X' \vee X'')$$
- *pour toute famille de sous-objets* $(X_i \hookrightarrow X)_{i \in I}$ *filtrante et* J-*couvrante,*
$$\mu(X) = \sup_{i \in I} \mu(X_i)\,,$$
- *pour tout morphisme* $X' \to X$ *qui est* J-*localement sur* X *de la forme* $\coprod_{i \in I} X \to X$, $\quad \mu(X') = (\# I) \cdot \mu(X)\,.$

Mesures de probabilités sur une catégorie cohérente :

Définition. –
Une mesure μ *sur un site* $(\mathcal{C}, J)$ *comme plus haut sera appelé une "mesure de probabilités" si elle est un point du sous-topos*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}^{\text{prob}} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}^{\text{mes}}$$

défini par les axiomes supplémentaires

$$\top \vdash P^1_{>q} \quad si \quad q < 1\,,$$

$$\top \vdash P^1_{<q} \quad si \quad q > 1\,,$$

c'est-à-dire si elle satisfait la condition

$$\mu(1) = 1$$

où 1 *désigne l'objet terminal de la catégorie cohérente* $\mathcal{C}$.

La correspondance entre les points et les mesures :

D'après l'équivalence de Diaconescu, on a :

Lemme. – *Se donner un point* μ *du topos* $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}^{\mathrm{mes}}$ *équivaut à se donner une application*

$$\mu^* : O_{\mathcal{C},J}^{\mathrm{mes}} \longrightarrow \{\textit{sous-ensembles du singleton } \{\bullet\}\} = \{\emptyset, \{\bullet\}\}$$

qui respecte les intersections finies et les réunions arbitraires.

Corollaire. –
(i) Tout point μ *du topos* $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}^{\mathrm{mes}}$ *définit une mesure de* $(\mathcal{C}, J)$

$$\mu : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

par

$$\mu(X) = \sup\{q \in Q \mid \mu^*(P_{>q}^X) = \{\bullet\}\}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mu(X) = \inf\{q \in Q \mid \mu^*(P_{<q}^X) = \{\bullet\}\}.$$

(ii) Réciproquement, toute mesure μ *de* $(\mathcal{C}, J)$

$$\mu : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

définit un point de $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}^{\mathrm{mes}}$ *par*

$$P_{>q}^X \longmapsto \begin{cases} \{\bullet\} & si \quad q < \mu(X), \\ \emptyset & si \quad q \geq \mu(X), \end{cases} \qquad P_{<q}^X \longmapsto \begin{cases} \{\bullet\} & si \quad q > \mu(X), \\ \emptyset & si \quad q \leq \mu(X). \end{cases}$$

Les mesures de Dirac :

Lemme. – *Considérons toujours une petite catégorie cohérente* $\mathcal{C}$ *munie d'une topologie* J
pour laquelle les morphismes $X \xrightarrow{u} \mathrm{Im}(u)$ *sont* J*-couvrants, ainsi que les réunions finies. Alors tout point* x *du topos* $\widehat{\mathcal{C}}_J$*, avec son foncteur plat et* J*-continu associé*

$$x^* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}\,,$$

définit une mesure δ_x *sur* $(\mathcal{C}, J)$*, appelée une mesure de Dirac, par la règle*

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \longmapsto \delta_x(X) = \#(x^*(X))\,.$$

Remarque. – Les mesures de Dirac sur $(\mathcal{C}, J)$ sont des mesures de probabilités.
En effet, on a toujours

$$x^*(1) = \{\bullet\}$$

et donc

$$\delta_x(1) = 1\,.$$

Expression en termes de "différences négligeables" :

On rappelle :

Lemme. – *Soit un ensemble partiellement ordonné $(O, \leq)$ qui admet*

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{des sup arbitraires } \bigvee, \\ \bullet \quad \text{des inf finis } \wedge, \end{cases}$$

et tel que $\wedge$ soit distributif par rapport à $\bigvee$.
Alors se donner une topologie J_μ sur O
plus fine que la topologie définie par $\bigvee$
équivaut à se donner une notion $\mathcal{N}_\mu$ de "différence négligeable"
entre paires ordonnées $(P \leq P')$ telle que

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{si les différences } P \leq P' \text{ et } P' \leq P'' \text{ sont négligeables,} \\ \quad\;\; \text{la différence } P \leq P'' \text{ est négligeable,} \\ \bullet \quad \text{si les différences } P_i \leq P_i',\ i \in I, \text{ sont négligeables,} \\ \quad\;\; \text{la différence } \bigvee\limits_{i \in I} P_i \leq \bigvee\limits_{i \in I} P_i' \text{ est négligeable,} \\ \bullet \quad \text{les différences } P \leq P \text{ sont toujours négligeables.} \end{cases}$$

Explicitation de la correspondance. –
Une famille $(P_i \leq P)_{i \in I}$ est dite J_μ-couvrante
si et seulement si la différence $\bigvee\limits_{i \in I} P_i \leq P$ est $\mathcal{N}_\mu$-négligeable.

Mesures sur une catégorie cohérente et différences négligeables :

On déduit du lemme précédent :

Corollaire. – *Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie cohérente munie d'une topologie J pour laquelle les morphismes $X \xrightarrow{u} \mathrm{Im}(u)$ et les réunions finies sont J-couvrants.*

Soit $(O^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}, \leq, \bigvee, \bigwedge)$ le "lieu" qui définit le topos localique $\mathcal{E}^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$ des mesures sur $(\mathcal{C}, J)$.

Alors se donner une mesure μ sur $(\mathcal{C}, J)$ équivaut à se donner une notion $\mathcal{N}_\mu$ de "différence négligeable" des paires ordonnées d'éléments de $O^{\mathrm{mes}}_{\mathcal{C},J}$ telle que, pour tout élément P, on a

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{ou bien } P \text{ est négligeable, c'est-à-dire la différence} \\ \qquad\qquad \emptyset \leq P \quad \text{est négligeable,} \\ \bullet \quad \text{ou bien la différence} \\ \qquad\qquad P \leq 1 \quad \text{est négligeable.} \end{cases}$$

Le topos localique des mesures d'une théorie géométrique :

Définition. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre de signature Σ. Soit $Q \subset \mathbb{R}_+$ une partie dense.*

(i) On notera

$$\mathrm{Mes}_{\mathbb{T}}$$

la théorie propositionnelle des statistiques sur $\mathbb{T}$,
écrite dans le langage constitué des symboles de relations (sans variables)

$$P^{\varphi}_{>q} \quad \text{et} \quad P^{\varphi}_{<q}\,, \quad q \in Q\,,$$

indexés par les formules géométriques φ de Σ.

(ii) On notera

$$\mathcal{E}^{\mathrm{mes}}_{\mathbb{T}}$$

le "topos classifiant" de cette théorie.

(iii) On notera

$$O^{\mathrm{mes}}_{\mathbb{T}}$$

l'ensemble partiellement ordonné
des sous-objets de l'objet terminal du topos $\mathcal{E}^{\mathrm{mes}}_{\mathbb{T}}$.

Rapport avec les mesures sur des catégories cohérentes :

Si $\mathbb{T}$ est une théorie géométrique du premier ordre de signature Σ, on dispose de

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{\mathbb{T}} = & \text{catégorie syntactique géométrique de } \mathbb{T}, \\ & \text{qui est une catégorie cohérente,} \\ J_{\mathbb{T}} = & \text{topologie syntactique de } \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \\ & \text{pour laquelle une famille de morphismes} \\ & \qquad\qquad \varphi_i \xrightarrow{\theta_i} \varphi \\ & \text{est couvrante si et seulement si} \\ & \qquad\qquad \varphi = \bigvee_{i \in I} \mathrm{Im}(\theta_i)\,. \end{cases}$$

Alors on a

$$\mathrm{Mes}_{\mathbb{T}} = \mathrm{Mes}_{\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}}}\,,$$

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{mes}} = \mathcal{E}_{\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}}}^{\mathrm{mes}}\,,$$

$$O_{\mathbb{T}}^{\mathrm{mes}} = O_{\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}}}^{\mathrm{mes}}$$

avec identité des langages puisque $\{\text{formules géométriques de } \Sigma\} = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})$.

Les mesures comme points du topos des mesures :

Corollaire. – *Soit* $\mathbb{T}$ *une théorie géométrique de signature* Σ.
Alors il revient au même de se donner

(1) *un modèle ensembliste de la théorie propositionnelle* $\mathrm{Mes}_{\mathbb{T}}$,

(2) *un point* μ *du topos localique* $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{mes}}$,

(3) *une topologie* J_μ *sur le lieu* $O_{\mathbb{T}}^{\mathrm{mes}}$ *qui soit plus fine que celle définie par les réunions* $\bigvee$ *et qui définisse un sous-topos "bivalent" de* $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{mes}}$,

(4) *une "mesure" sur* $\mathbb{T}$ *c'est-à-dire une application*

$$\mu : \{\textit{formules géométriques de } \Sigma\} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \qquad \varphi \longmapsto \mu(\varphi)$$

telle que

- $\mu(\varphi) \geq \mu(\varphi')$ *si* φ *et* φ' *sont reliés par un monomorphisme de* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, $\varphi' \hookrightarrow \varphi$,
- $\mu(\varphi) \leq \mu(\varphi')$ *si* φ *et* φ' *sont reliés par un morphisme* $J_{\mathbb{T}}$*-couvrant*, $\varphi' \to \varphi$,
- *pour toutes formules* φ', φ'' *dans un même contexte* $\vec{x}$,
$$\mu(\varphi') + \mu(\varphi'') = \mu(\varphi' \wedge \varphi'') + \mu(\varphi' \vee \varphi''),$$
- *pour toutes formules* $(\varphi_i)_{i \in I}$ *dans un même contexte* $\vec{x}$ *et* $\varphi = \bigvee\limits_{i \in I} \varphi_i$,
$$\mu(\varphi) = \sup_{i_1, \cdots, i_k \in I} \mu(\varphi_{i_1} \vee \cdots \vee \varphi_{i_k}),$$
- *pour tout morphisme* $\varphi' \to \varphi$ *de* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ *qui est* $J_{\mathbb{T}}$*-localement sur* φ *de la forme* $\coprod\limits_{i \in I} \varphi \to \varphi$, $\qquad \mu(\varphi') = (\# I) \cdot \mu(\varphi)$.

Mesures de probabilités sur une théorie géométrique :

Définition. –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre de signature Σ.
Une mesure μ sur les formules géométriques de $\mathbb{T}$
sera appelée une “mesure de probabilités”
si elle est un point du sous-topos

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}}^{\text{prob}} = \mathcal{E}_{\mathcal{C}_{\mathbb{T}},J_{\mathbb{T}}}^{\text{prob}} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C}_{\mathbb{T}},J_{\mathbb{T}}}^{\text{mes}} = \mathcal{E}_{\mathbb{T}}^{\text{mes}},$$

c’est-à-dire si elle satisfait la condition

$$\mu(\top) = 1$$

où $\top$ désigne ici la formule du vrai sans variable.