Mesures de probabilités, topologies de Grothendieck et logique des mesures

par Laurent Lafforgue

(Centre de recherche de Huawei, Boulogne-Billancourt, France)

I. Mesures de probabilités sur un espace,
topologies "à deux valeurs"
et topos localique des mesures de probabilités

Mesures de probabilités sur un espace :

Définition. – *Soit X un ensemble.*

Soit $\mathcal{U}$ une famille de parties de X qui est stable par $\begin{cases} \text{intersections finies,} \\ \text{réunions dénombrables.} \end{cases}$

Une mesure de probabilités sur $(X,\mathcal{U})$ est une application

$$\mu : \mathcal{U} \longrightarrow [0,1]$$

telle que

$$\begin{cases} \bullet \quad \mu(\emptyset) = 0 \text{ et } \mu(X) = 1, \\ \bullet \quad \mu(U \cup V) + \mu(U \cap V) = \mu(U) + \mu(V) \text{ pour tous } U, V \in \mathcal{U}, \\ \bullet \quad \mu(U) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n) \\ \quad\ \text{pour toute suite croissante de } U_n \in \mathcal{U},\ n \in \mathbb{N}, \text{ de réunion } U = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n. \end{cases}$$

Remarque. – La famille $\overline{\mathcal{U}}$ des parties de X qui sont des réunions arbitraires d'éléments de $\mathcal{U}$ est stable par $\begin{cases} \text{réunions arbitraires,} \\ \text{intersections finies.} \end{cases}$

C'est une topologie sur X.

La notion de différence μ-négligeable :

Définition. – *Soit μ une* <u>*mesure de probabilités*</u> *sur un espace $(X, \mathcal{U})$.*
On dit que la <u>*différence*</u> *entre deux éléments ordonnés de $\mathcal{U}$*

$$U' \subseteq U$$

est μ-<u>*négligeable*</u> *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément U'' de $\mathcal{U}$ tel que*

$$U \subseteq U' \cup U'' \text{ et } \mu(U'') < \varepsilon.$$

Lemme. –

(i) *Si la différence entre deux éléments $U' \subseteq U$ de $\mathcal{U}$ est μ-négligeable, il en est de même de la différence $U' \cap V \subseteq U \cap V$ pour tout $V \in \mathcal{U}$.*

(ii) *Si des différences $U'' \subseteq U'$ et $U' \subseteq U$ sont μ-négligeables, il en est de même de la différence $U'' \subseteq U$.*

(iii) *Pour toute suite de paires ordonnées d'éléments de $\mathcal{U}$*

$$U'_n \subseteq U_n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

dont les différences sont μ-négligeables, il en est de même de la différence

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\,.$$

La topologie de Grothendieck associée à une notion de négligeable :

Définition. – *Soit $\mathcal{U}$ un ensemble ordonné muni de*

$$\begin{cases} \bullet & \text{un sup } \bigvee \text{ des familles dénombrables,} \\ \bullet & \text{un inf } \wedge \text{ des familles finies, distributif par rapport à } \bigvee . \end{cases}$$

Soit $\mathcal{N}$ une partie des paires ordonnées $U' \leq U$ d'éléments de $\mathcal{U}$, telle que

$$\begin{cases} (1) & \text{Si } U' \leq U \text{ est dans } \mathcal{N}, \text{ alors pour tout } V \in \mathcal{U}, \\ & U' \wedge V \leq U \wedge V \text{ est encore dans } \mathcal{N}. \\ (2) & \text{Si } U'' \leq U' \text{ et } U' \leq U \text{ sont dans } \mathcal{N}, \text{ alors} \\ & U'' \leq U \text{ est encore dans } \mathcal{N}. \\ (3) & \text{Si des } (U'_n \leq U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont dans } \mathcal{N}, \text{ alors} \\ & \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} U'_n \leq \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n \text{ est encore dans } \mathcal{N}. \end{cases}$$

Alors on définit une topologie de Grothendieck $J_{\mathcal{N}}$ sur $\mathcal{U}$, vue comme une catégorie cartésienne, en décidant qu'une famille de morphismes

$$U_i \leq U, \quad i \in I,$$

est couvrante si elle contient une sous-famille dénombrable

$$U_{i_n} \leq U, \quad n \in \mathbb{N},$$

telle que la paire ordonnée

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} U_{i_n} \leq U$$

soit élément de $\mathcal{N}$.

Les topologies de Grothendieck associées aux notions de négligeable :

Lemme. – *Soit* $\mathcal{U}$ *un ensemble ordonné muni de*

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{un sup } \bigvee \text{ des familles dénombrables} \\ \bullet \quad \text{un inf } \wedge \text{ des familles finies, distributif par rapport à } \bigvee. \end{cases}$$

Alors une topologie de Grothendieck J sur $\mathcal{U}$ est la topologie $J_{\mathcal{N}}$ associée à une notion de "différence négligeable" $\mathcal{N}$ sur les paires ordonnées

$$U' \leq U \text{ d'éléments de } \mathcal{U},$$

si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes :

(1') *Une famille de morphismes de $\mathcal{U}$ vu comme une catégorie*

$$U_i \leq U\,, \quad i \in I\,,$$

est J-couvrante si et seulement si elle contient une sous-famille dénombrable J-couvrante.

(2') *Pour toute famille dénombrable d'éléments de U*

$$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad \bigvee_{n\in\mathbb{N}} U_n = U\,,$$

la famille dénombrable des morphismes

$$U_n \longrightarrow U\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

est J-couvrante.

Le topos associé à une notion de différence négligeable :

Corollaire. –
Un ensemble ordonné $(\mathcal{U}, \leq)$
qui admet ($\bigvee$ *dénombrable,* $\wedge$ *fini distributif)*
et qui est muni d'une notion $\mathcal{N}$ *de différence négligeable*

de paires ordonnées $U' \leq U$

définit

un site $(\mathcal{U}, J_{\mathcal{N}})$

et donc

un topos $\widehat{\mathcal{U}}_{\mathcal{N}}$

muni d'un foncteur canonique cartésien

$$\ell : \mathcal{U} \longrightarrow \widehat{\mathcal{U}}_{\mathcal{N}} \, .$$

Corollaire. –
En particulier, une mesure de probabilités μ *sur un* $(X, \mathcal{U})$
définit une notion $\mathcal{N}_\mu$ *de différence négligeable de paire ordonnée*

$$U' \subseteq U$$

et donc un topos

$$\widehat{\mathcal{U}}_{\mathcal{N}_\mu}$$

muni d'un foncteur canonique cartésien

$$\ell : \mathcal{U} \longrightarrow \widehat{\mathcal{U}}_{\mathcal{N}_\mu} \, .$$

Points de topos et foncteurs plats :

Pour une notion $\mathcal{N}$ de différence négligeable sur

$$(\mathcal{U}, \leq, \bigvee \text{ dénombrable}, \wedge \text{ fini distributif}),$$

la catégorie des points du topos associé $\quad \mathrm{pt}\,(\widehat{\mathcal{U}}_{\mathcal{N}})$
s'identifie à la catégorie des foncteurs $\quad x^* : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Ens}$
qui sont

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{plats, c'est-à-dire cartésiens (puisque } \mathcal{U} \text{ est cartésienne),} \\ \bullet \quad J_{\mathcal{N}}\text{-continus.} \end{cases}$$

Lemme. – *Soit $(\mathcal{U}, \leq, \wedge$ fini$)$ un ensemble ordonné cartésien, donc qui admet en particulier un plus grand élément X.*

(i) Les foncteurs plats (c'est-à-dire cartésiens)

$$x^* : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

sont indexés par les parties $\mathcal{P}$ de $\mathcal{U}$ telles que

$$\begin{cases} \bullet \quad \mathcal{P} \text{ contient } X \text{ et est stable par } \wedge, \\ \bullet \quad \text{pour tous } U \leq V, \text{ on a } V \in \mathcal{P} \text{ si } U \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

(ii) Le foncteur $x^*_{\mathcal{P}}$ associé à une telle partie $\mathcal{P}$ est

$$\begin{cases} U \longmapsto \{\bullet\} & \text{si} \quad U \in \mathcal{P}, \\ U \longmapsto \emptyset & \text{si} \quad U \notin \mathcal{P}. \end{cases}$$

Les points des topos $\widehat{\mathcal{U}}_{\mathcal{N}}$:

Proposition. –
Soit $\mathcal{N}$ une notion de différence négligeable sur

$$(\mathcal{U}, \leq, \bigvee \text{ dénombrable}, \wedge \text{ fini distributif}).$$

Soit un foncteur cartésien

$$x^* = x^*_{\mathcal{P}} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

défini par une partie $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{U}$ qui est stable par

$$\begin{cases} \bullet & \text{les inf } \wedge \text{ finis,} \\ \bullet & \text{passage aux éléments plus grands.} \end{cases}$$

Alors x^* est $J_{\mathcal{N}}$-continu si et seulement si,
pour tout $U \in \mathcal{U}$ et toute famille dénombrable

$$U_n \leq U \,, \quad n \in \mathbb{N},$$

telle que la différence

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \leq U$$

soit dans $\mathcal{N}$, on a

$$U \in \mathcal{P}$$

si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$U_n \in \mathcal{P} \,.$$

Le cas de familles de parties d'un espace :

Lemme. – *Supposons que* ($\mathcal{U}$, $\leq$, $\bigvee$ *dénombrable*, $\wedge$ *fini*)
est une famille de parties d'un espace X,
supposée stable par réunions dénombrables $\bigvee$ *et intersections finies* $\wedge$.
Alors :

(i) Tout élément $x \in X$ *définit un foncteur cartésien*

$$x^* = x^*_{\mathcal{P}} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

par $\mathcal{P} = \mathcal{P}_x = \{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\}$.

(ii) Ce foncteur est $J_{\mathcal{N}}$*-continu si et seulement si,*
pour toute paire ordonnée d'éléments de $\mathcal{U}$

$$U' \subseteq U,$$

telles que $x \in U$ *et* $x \notin U'$*, la différence*

$$U' \subseteq U$$

ne peut être dans $\mathcal{N}$.

Remarque. – Si $\mathcal{N}$ est définie par une mesure de probabilités μ sur $\mathcal{U}$,
la condition de (ii) est vérifiée si, pour toute paire

$$U' \subseteq U \quad \text{telle que} \quad x \in U \ \text{ et } \ x \notin U', \quad \text{on a } \ \mu(U') < \mu(U)\,.$$

Espaces de suites et fréquences d'incidence :

Si X est un ensemble,
$X^{\mathbb{N}}$ est l'espace des suites d'éléments de X

$$x_\bullet = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Définition. –
Pour toute suite $x_\bullet = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
la suite des fréquences d'incidence d'une partie $U \subseteq X$ *dans* $x_\bullet$ *est*

$$p_n^U(x_\bullet) = \frac{\#\{0 \le k \le n \mid x_k \in U\}}{n+1} \in [0,1]\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Définition. –
Pour toute suite $x_\bullet = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
les fréquences limites inférieure et supérieure d'incidence d'une partie $U \subseteq X$ *dans* $x_\bullet$ *sont*

$$p_-^U(x_\bullet) = \liminf_{n\mapsto+\infty} p_n^U(x_\bullet) = \lim_{n\mapsto+\infty} \inf_{k\ge n} p_k^U(x_\bullet)$$

et

$$p_+^U(x_\bullet) = \limsup_{n\mapsto+\infty} p_n^U(x_\bullet) = \lim_{n\mapsto+\infty} \sup_{k\ge n} p_k^U(x_\bullet)\,.$$

Sous-espaces de suites définis par des fréquences limites d'incidence :

Définition. –
Pour tout *sous-ensemble* $U \subseteq X$
et tout *élément* $q \in [0,1]$,
on dispose des deux *sous-espaces associés* *de* $X^{\mathbb{N}}$

$$P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) = \{x_\bullet \in X^{\mathbb{N}} \mid p^U_-(x_\bullet) \geq q\}$$

et

$$P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) = \{x_\bullet \in X^{\mathbb{N}} \mid p^U_+(x_\bullet) \leq q\}.$$

Remarques. –

(i) On a $x_\bullet \in P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}})$
si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N} \mid p^U_n(x_\bullet) < q - \varepsilon\} \text{ est } \underline{\text{fini}}.$$

(ii) De même, on a $x_\bullet \in P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}})$
si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N} \mid p^U_n(x_\bullet) > q + \varepsilon\} \text{ est } \underline{\text{fini}}.$$

Treillis de parties définies par des fréquences limites d'incidence :

Définition. – *Soit X un ensemble.*
Soit $\mathcal{U}$ une famille de parties de X
stable par intersections finies et réunions dénombrables.
Soit Q un sous-ensemble dense de $[0,1]$.
On notera alors

$$\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$$

la famille des parties de $X^{\mathbb{N}}$
qui peuvent s'écrire comme des réunions dénombrables
d'intersections finies de parties de la forme

$$P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) = \{x_\bullet \in X^{\mathbb{N}} \mid p^U_-(x_\bullet) \geq q\}$$

ou

$$P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) = \{x_\bullet \in X^{\mathbb{N}} \mid p^U_+(x_\bullet) \leq q\}$$

avec $U \in \mathcal{U}$ et $q \in Q$.

Remarque. – Ainsi, $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ est la plus petite famille de parties de $X^{\mathbb{N}}$
qui contient les

$$P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \text{ et } P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}), \quad U \in \mathcal{U}, q \in Q,$$

et qui est stable par intersections finies et réunions dénombrables.

Relations d'inclusion entre parties définies par des fréquences limites :

On considère comme précédemment une famille $\mathcal{U}$ de parties d'un ensemble X.

Lemme. –

(i) *Pour toute partie $U \in \mathcal{U}$ de X et tous éléments $q_1 \leq q_2$ de $Q \subseteq [0,1]$, on a les relations d'inclusion*

$$P^U_{\geq q_1}(X^{\mathbb{N}}) \supseteq P^U_{\geq q_2}(X^{\mathbb{N}})$$

et

$$P^U_{\leq q_1}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^U_{\leq q_2}(X^{\mathbb{N}}) .$$

(ii) *Pour toutes parties $U \subseteq V$ de X éléments de $\mathcal{U}$ et tout élément q de $Q \subseteq [0,1]$, on a les relations d'inclusion*

$$P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^V_{\geq q}(X^{\mathbb{N}})$$

et

$$P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \supseteq P^V_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) .$$

Relations d'exclusion entre parties définies par des fréquences limites :

On considère toujours une famille $\mathcal{U}$
de parties d'un ensemble X.

Lemme. –
Pour toute partie $U \in \mathcal{U}$ de X
et tous éléments $q < q'$ de $Q \subseteq [0,1]$,
on a la relation d'exclusion

$$P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^U_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}}) = \emptyset\,.$$

Démonstration. –
Cela résulte des définitions

$$P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) = \{x_\bullet \in X^{\mathbb{N}} \mid p^U_+(x_\bullet) \leq q\}\,,$$
$$P^U_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}}) = \{x_\bullet \in X^{\mathbb{N}} \mid p^U_-(x_\bullet) \geq q'\}$$

puisque $p^U_+(x_\bullet)$ et $p^U_-(x_\bullet)$
sont les limites supérieure et inférieure de la même suite

$$P^U_n(x_\bullet)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

La propriété d'additivité des fréquences d'incidence :

Lemme. –
Pour toute suite $x_\bullet \in X^{\mathbb{N}}$ *d'éléments de* X
et pour toutes parties U, V *de* X*,*
on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ *la formule*

$$p_n^U(x_\bullet) + p_n^V(x_\bullet) = p_n^{U\cup V}(x_\bullet) + p_n^{U\cap V}(x_\bullet)\,.$$

Démonstration. –
En effet, on a pour toute partie U de X

$$p_n^U(x_\bullet) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{0\leq k\leq n} \mathbb{I}_U(x_i)\,,$$

en notant
$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{I}_U & : & X & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in U\,, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin U\,, \end{cases} \end{array}$$

et on observe que les fonctions

$$\mathbb{I}_U\,,\ \mathbb{I}_V\,,\ \mathbb{I}_{U\cup V}\,,\ \mathbb{I}_{U\cap V}$$

sont liées par la relation

$$\mathbb{I}_U + \mathbb{I}_V = \mathbb{I}_{U\cup V} + \mathbb{I}_{U\cap V}\,.$$

Traduction de l'additivité pour les parties définies par des fréquences limites :

Corollaire. – *Pour toutes parties* $U, V \in \mathcal{U}$ *de* X *et tous éléments* $q_1, q_2, q_3, q_4 \in Q \subseteq [0,1]$ *liés par la relation* $q_1 + q_2 = q_3 + q_4$, *on a les relations d'inclusion*

$$\begin{cases} P^U_{\geq q_1}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^V_{\geq q_2}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cap V}_{\leq q_3}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^{U\cup V}_{\geq q_4}(X^{\mathbb{N}})\,, \\ P^U_{\leq q_1}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^V_{\leq q_2}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cap V}_{\geq q_3}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^{U\cup V}_{\leq q_4}(X^{\mathbb{N}})\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P^U_{\geq q_1}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^V_{\geq q_2}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cup V}_{\leq q_4}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^{U\cap V}_{\geq q_3}(X^{\mathbb{N}})\,, \\ P^U_{\leq q_1}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^V_{\leq q_2}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cup V}_{\geq q_4}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^{U\cap V}_{\leq q_3}(X^{\mathbb{N}})\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P^U_{\geq q_1}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cap V}_{\leq q_3}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cup V}_{\leq q_4}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^V_{\leq q_2}(X^{\mathbb{N}})\,, \\ P^U_{\leq q_1}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cap V}_{\geq q_3}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cup V}_{\geq q_4}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^V_{\geq q_2}(X^{\mathbb{N}})\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P^V_{\geq q_2}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cap V}_{\leq q_3}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cup V}_{\leq q_4}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^U_{\leq q_1}(X^{\mathbb{N}})\,, \\ P^V_{\leq q_2}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cap V}_{\geq q_3}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cup V}_{\geq q_4}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^U_{\geq q_1}(X^{\mathbb{N}})\,. \end{cases}$$

Expression de la “loi des grands nombres” :

Théorème. –
Soit $\mathcal{U}$ une famille de parties d’un ensemble X
qui est stable par intersections finies et unions dénombrables.
Soit une mesure de probabilités $\mu : \mathcal{U} \to [0,1]$.
Soit $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ la famille des parties de $X^{\mathbb{N}}$
qui sont des réunions dénombrables d’intersections finies
de parties de la forme

$$P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \quad \text{ou} \quad P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \quad \text{avec } U \in \mathcal{U} \text{ et } q \in Q \subseteq [0,1]\,.$$

Alors :

(i) *La mesure μ sur $\mathcal{U}$ induit une mesure produit $\mu_{\mathbb{N}}$ sur $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$.*

(ii) *La mesure $\mu_{\mathbb{N}}$ induit une notion de “différence négligeable” $\mathcal{N}_{\mathbb{N}}$ telle que, pour toute partie $U \in \mathcal{U}$ et tout $q \in Q \subseteq [0,1]$, on a*

- *$P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}})$ est négligeable si $q < \mu(U)$,*
- *$P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}})$ est négligeable si $q > \mu(U)$,*
- *la différence $P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est négligeable si $q \geq \mu(U)$,*
- *la différence $P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est négligeable si $q \leq \mu(U)$.*

Conséquence pour la relation entre mesures de probabilités et topologies de Grothendieck :

On considère comme précédemment une famille $\mathcal{U}$ de parties de X qui est stable par intersections finies et unions dénombrables.
On note toujours $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ la famille des parties de $X^{\mathbb{N}}$ qui sont des réunions dénombrables d'intersections finies de parties de la forme

$$P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \quad \text{ou} \quad P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \quad \text{avec } U \in \mathcal{U} \text{ et } q \in Q \subseteq [0,1]\,.$$

Alors :

Corollaire. –

(i) *Une mesure* μ *sur* $\mathcal{U}$ *induit une mesure produit* $\mu_{\mathbb{N}}$ *sur* $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$.

(ii) *La mesure* $\mu_{\mathbb{N}}$ *induit une notion de "différence négligeable"* $\mathcal{N}_\mu$ *sur les paires ordonnées d'éléments de* $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$.

(iii) *La connaissance de cette notion* $\mathcal{N}_\mu$ *de "différence négligeable" équivaut à celle de la topologie de Grothendieck* J_μ *sur* $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ *qu'elle définit.*

(iv) *Elle équivaut aussi à la connaissance du sous-topos* $\widehat{(\mathcal{U}_{\mathbb{N}})}_{J_\mu}$ *de* $\widehat{\mathcal{U}}_{\mathbb{N}}$.

(v) *La connaissance de* $\mathcal{N}_\mu$ *ou celle de la topologie* J_μ *suffit à reconstituer la mesure* μ *sur* $\mathcal{U}$.

Des conséquences indépendantes du choix de la mesure :

On considère toujours la famille $\mathcal{U}$ de parties de X
et la famille $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ de parties de $X^{\mathbb{N}}$
qui lui est associée par la considération
des fréquences limites d'incidence.

Corollaire. –
Pour toute mesure μ de $\mathcal{U}$,
la notion de différence négligeable $\mathcal{N}_{\mu}$ sur $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$
qui est induite par la mesure produit $\mu_{\mathbb{N}}$
satisfait la propriété suivante :

$$\begin{cases} \textit{Pour toute partie } U \in \mathcal{U} \\ \textit{et tous éléments } q \geq q' \textit{ de } Q \subseteq [0,1], \\ \textit{la différence} \\ P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \cup P^U_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq X^{\mathbb{N}} \\ \textit{est négligeable.} \end{cases}$$

Une expression de la compatibilité des mesures avec les unions dénombrables :

On considère toujours la famille $\mathcal{U}$ de parties de X
et la famille $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ de parties de $X^{\mathbb{N}}$ qui lui est associée.

Corollaire. –
Supposons que le sous-ensemble dense $Q \subseteq [0,1]$ est dénombrable.
Pour toute mesure μ sur $\mathcal{U}$,
la notion induite $\mathcal{N}_\mu$ de différence négligeable sur $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$
satisfait la propriété suivante :

Pour toute suite croissante $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathcal{U}$, avec

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\,,$$

et pour tout élément $p \in [0,1]$, la différence entre éléments de $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$

$$\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N},q\in Q\\ q>p}} P^{U_n}_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq \bigcup_{\substack{q\in Q\\ q>p}} P^{U}_{\geq q}(X^{\mathbb{N}})$$

est négligeable.

Démonstration. –

- Si $p \geq \mu(U)$, toutes les parties impliquées sont négligeables.
- Si $p < \mu(U)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $q \in Q$ tels que $\quad p < q < \mu(U_n) \leq \mu(U)$
  si bien que la différence $P^{U_n}_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \subset X^{\mathbb{N}}$ est négligeable.

La question de caractériser les topologies de Grothendieck associées à des mesures :

On rappelle que $\mathcal{U}$ est une famille de parties d'un ensemble X, stable par intersections finies et par unions dénombrables.
On a noté

$$\mathcal{U}_{\mathbb{N}} \text{ la famille des parties de } X^{\mathbb{N}}$$

qui sont des unions dénombrables d'intersections finies de parties de la forme

$$P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \qquad \text{ou} \qquad P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}})$$

avec $U \in \mathcal{U}$ et $q \in Q$.
Ici, Q est une partie de $[0,1]$ telle que

$$\begin{cases} \bullet \quad Q \text{ est dénombrable,} \\ \bullet \quad Q \text{ est dense dans } [0,1], \\ \bullet \quad \text{pour tous éléments } q_1, q_2, q_3 \in Q \text{ et } q \in [0,1], \text{ on a} \\ \qquad\qquad q \in Q \quad \text{si} \quad q_1 + q_2 = q_3 + q\,. \end{cases}$$

Question.– *Comment caractériser les topologies de Grothendieck J sur $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$, correspondant à une notion de différence négligeable $\mathcal{N}$, qui sont associées aux mesures de probabilités μ sur $\mathcal{U}$?*

Enoncé de la caractérisation des topologies associées à des mesures :

Proposition. – *Une topologie de Grothendieck J sur $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ est associée à une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{U}$ si et seulement si elle correspond à une notion de "différence négligeable" $\mathcal{N}$ telle que :*

(1) *$X^{\mathbb{N}}$ n'est pas négligeable.*

(2) *Pour tous éléments $q \geq q'$ de $Q \subseteq [0,1]$ et toute $U \in \mathcal{U}$, la différence*

$$P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \cup P^U_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq X^{\mathbb{N}}$$

est négligeable.

(3) *Pour toute suite croissante $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathcal{U}$, de réunion $U = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$, et pour tout élément $q \in Q$, la différence*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}, q'\in Q, q'>q} P^{U_n}_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq \bigcup_{q'\in Q, q'>q} P^U_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}})$$

est négligeable.

(4) *Pour tout $q \in Q \subseteq [0,1]$ et toute $U \in \mathcal{U}$, on a*

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{ou bien } P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \text{ est négligeable,} \\ \bullet \quad \text{ou bien la différence } P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \subset X^{\mathbb{N}} \text{ est négligeable.} \end{cases}$$

Identification de la mesure :

On veut construire une mesure μ sur $\mathcal{U}$
à partir de la topologie J associée à une notion de négligeable $\mathcal{N}$
qui satisfait les propriétés (1), (2), (3), (4) de la proposition.
On la définit naturellement comme suit :

Définition. –
Pour toute partie $U \in \mathcal{U}$, on pose

$$\mu(U) = \inf\{q \in Q \mid P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \textit{ est négligeable}\}.$$

Remarques. –
Il résulte de cette définition et de la propriété (4) :

(i) $P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}})$ est négligeable pour tout $q > \mu(U)$.

(ii) La différence

$$P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \subset X^{\mathbb{N}}$$

est négligeable pour tout $q < \mu(U)$,
et donc aussi pour $q = \mu(U)$ si $\mu(U) \in Q$.

Enoncé et preuve de la propriété symétrique :

Lemme. – *Pour toute partie $U \in \mathcal{U}$, on a :*

(i) $P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}})$ *est négligeable pour tout* $q < \mu(U)$.

(ii) *La différence*

$$P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \subset X^{\mathbb{N}}$$

est négligeable pour tout $q > \mu(U)$ *et aussi pour* $q = \mu(U)$ *si* $\mu(U) \in Q$.

Démonstration. – On pose $\mu_U = \sup\{q \in Q \mid P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \text{ est négligeable}\}$.

- Les intersections

  $$P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^U_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}})$$

  sont vides si $q < q'$.
  Cela impose que $P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}})$ est négligeable si $q < \mu(U)$
  et donc $\mu_U \geq \mu(U)$.
- Les différences

  $$P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \cup P^U_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq X^{\mathbb{N}}$$

  sont négligeables si $q \geq q'$. Cela impose que les différences

  $$P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \subset X^{\mathbb{N}}$$

  sont négligeables si $q > \mu(U)$, et donc $\mu_U \leq \mu(U)$.

La propriété de croissance de la mesure :

Lemme. – *Pour toute paire ordonnée $U_1 \subseteq U_2$ de $\mathcal{U}$, on a*

$$\mu(U_1) \leq \mu(U_2)\,.$$

Démonstration. – On a par définition

$$\mu(U_1) = \inf\{q \in Q \mid P^{U_1}_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \text{ est négligeable}\},$$

$$\mu(U_2) = \inf\{q \in Q \mid P^{U_2}_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \text{ est négligeable}\}.$$

La conclusion résulte de ce que la relation d'inclusion

$$U_1 \subseteq U_2$$

entraîne les relations d'inclusion

$$P^{U_1}_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^{U_2}_{\geq q}(X^{\mathbb{N}})$$

pour tout $q \in Q$. Il en résulte en effet que

$$P^{U_1}_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \ \text{ est négligeable}$$

$$\text{si} \qquad P^{U_2}_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \ \text{ est négligeable.}$$

La propriété d'additivité de la mesure :

Lemme. – *Pour tous éléments* $U, V \in \mathcal{U}$, *on a*

$$\mu(U) + \mu(V) = \mu(U \cup V) + \mu(U \cap V)\,.$$

Démonstration. – Pour tous éléments $q_1, q_2, q_3, q_4 \in Q$ tels que

$$q_1 + q_2 = q_3 + q_4\,,$$

on a les inclusions

$$P^U_{\geq q_1}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^V_{\geq q_2}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cap V}_{\leq q_3}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^{U\cup V}_{\geq q_4}(X^{\mathbb{N}})\,,$$

$$P^U_{\leq q_1}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^V_{\leq q_2}(X^{\mathbb{N}}) \cap P^{U\cap V}_{\geq q_3}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq P^{U\cup V}_{\leq q_4}(X^{\mathbb{N}})\,.$$

Il en résulte :

- La différence
$$P^{U\cup V}_{\geq q_4}(X^{\mathbb{N}}) \subset X^{\mathbb{N}}$$
est négligeable si $q_1 < \mu(U)$, $q_2 < \mu(V)$, $q_3 > \mu(U \cap V)$, et donc $\mu(U \cup V) \geq \mu(U) + \mu(V) - \mu(U \cap V)$.
- La différence
$$P^{U\cup V}_{\leq q_4}(X^{\mathbb{N}}) \subset X^{\mathbb{N}}$$
est négligeable si $q_1 > \mu(U)$, $q_2 > \mu(V)$, $q_3 < \mu(U \cap V)$, et donc $\mu(U \cup V) \leq \mu(U) + \mu(V) - \mu(U \cap V)$.

Compatibilité de la mesure avec les réunions croissantes dénombrables :

Lemme. – *Pour toute suite croissante* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de parties* $U_n \in \mathcal{U}$*,*
de réunion $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$*, on a*

$$\mu(U) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n)\,.$$

Démonstration. – On sait déjà que $\mu(U) \geq \mu(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On sait d'autre part que pour tout $q \in Q$, la différence

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}, q'\in Q, q'>q} P^{U_n}_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}}) \subseteq \bigcup_{q'\in Q, q'>q} P^{U}_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}})$$

est négligeable. Or, si $q < \mu(U)$, la différence

$$\bigcup_{q'\in Q, q'>q} P^{U}_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}}) \subset X^{\mathbb{N}}$$

est également négligeable.
Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ et $q' > q$ tels que

$$P^{U_n}_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}})$$

ne soit pas négligeable. Cela impose

$$\mu(U_n) \geq q' > q\,.$$

La conclusion résulte de ce que $q < \mu(U)$ peut être choisi arbitrairement proche.

La notion de topos "à deux valeurs" :

Définition. –
Un topos $\mathcal{E}$ est dit "à deux valeurs"
si les deux seuls sous-objets de son objet terminal 1 *sont*

$$\begin{cases} 1 \text{ lui-même,} \\ \text{l'objet initial } \emptyset. \end{cases}$$

Remarque. –
Si $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est le topos classifiant
d'une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$,
il est "à deux valeurs" si et seulement si
la théorie $\mathbb{T}$ est "complète" au sens que,
pour toute formule géométrique φ sans variable libre
écrite dans la signature Σ de φ,
on a

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{ou bien } \varphi \text{ est "démontrablement vraie", soit} \\ \qquad\qquad \top \vdash \varphi \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable,} \\ \bullet \quad \text{ou bien } \varphi \text{ est "démontrablement fausse", soit} \\ \qquad\qquad \varphi \vdash \perp \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable.} \end{cases}$$

Une reformulation de la notion de mesure en termes de topos “à deux valeurs” :

On considère toujours une famille $\mathcal{U}$ de parties d'un ensemble X, supposée stable par intersections finies et unions dénombrables.

On note toujours $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ la famille ordonnée des parties de $X^{\mathbb{N}}$ qui sont des réunions dénombrables d'intersections finies de parties de $X^{\mathbb{N}}$ de la forme

$$P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \quad \text{ou} \quad P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \quad \text{avec} \quad U \in \mathcal{U} \;\text{ et }\; q \in Q\,.$$

Ici, Q est une partie dénombrable et dense de $[0,1]$, stable par la relation $q_1 + q_2 = q_3 + q_4$ de $[0,1]^4$.

Définition. – *On note $J_{\mathbb{N}}$ la plus petite topologie de Grothendieck de $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ pour laquelle :*

(1) *Toute réunion dénombrable $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ de parties $P_n \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ admet pour recouvrement la famille des P_n.*

(2) *Pour tous éléments $q \geq q'$ de Q et toute $U \in \mathcal{U}$, $X^{\mathbb{N}}$ est recouvert par $P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}})$ et $P^U_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}})$.*

(3) *Pour toute réunion $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ d'une suite croissante de parties $U_n \in \mathcal{U}$, et tout $q \in Q$, la famille dénombrable des $P^{U_n}_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}})$, $n \in \mathbb{N}$, $q' > q$, recouvre $\bigcup_{q'\in Q, q'>q} P^U_{\geq q'}(X^{\mathbb{N}})$.*

Reformulation de l'équivalence entre mesures et topologies :

Proposition. –
Soit $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ le topos des faisceaux sur le site

$$(\mathcal{U}_{\mathbb{N}}, J_{\mathbb{N}})$$

constitué de la famille ordonnée $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$,
vue comme une catégorie,
et munie de la topologie de Grothendieck $J_{\mathbb{N}}$.
Alors l'équivalence entre mesures de probabilités μ sur $\mathcal{U}$
et topologies de Grothendieck J_μ sur $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$

$$\mu \longleftrightarrow J_\mu$$

fait se correspondre de manière biunivoque

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{les mesures de probabilités } \mu \text{ sur } \mathcal{U}, \\ \bullet \quad \text{les sous-topos } \mathcal{E}_\mu \text{ de } \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \\ \quad\;\; \text{qui sont “à deux valeurs”.} \end{cases}$$

Vérification de cette reformulation de l'équivalence :

Se donner un sous-topos de $\mathcal{E}_{\mathbb{N}} = \widehat{(\mathcal{U}_{\mathbb{N}})}_{J_{\mathbb{N}}}$
équivaut à se donner une topologie de Grothendieck

$$J \supseteq J_{\mathbb{N}} \quad \text{sur} \quad \mathcal{U}_{\mathbb{N}} \,.$$

Compte-tenu de la proposition précédente,
il suffit de prouver que si une topologie $J \supseteq J_{\mathbb{N}}$
définit un topos à deux valeurs,
alors toute famille couvrante de morphismes de $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$

$$P_i \subseteq P \,, \quad i \in I \,,$$

contient une sous-famille couvrante dénombrable.
Or chaque P ou P_i, $i \in I$, recouvre $X^{\mathbb{N}}$ tout entier
ou admet pour recouvrement la famille vide.
Si l'un des P_i recouvre $X^{\mathbb{N}}$, il recouvre a fortiori P.
Si au contraire tous les P_i admettent pour recouvrement la famille vide,
il en est de même de P.
Ainsi, P admet dans les deux cas un sous-recouvrement constitué
d'au plus un élément de la famille $(P_i)_{i \in I}$.

Point d'un topos et sous-topos “à deux valeurs” :

On rappelle :

Lemme. – *Soit un site* $(\mathcal{C}, J)$.

(i) *Tout morphisme de topos* $\mathcal{E} \xrightarrow{f=(f^*, f_*)} \widehat{\mathcal{C}}_J$
se factorise canoniquement en le composé $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_{J'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$
d'un épimorphisme $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_{J'}$ *et d'un plongement* $\widehat{\mathcal{C}}_{J'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$.
Ce dernier est défini par la topologie $J' \supseteq J$ *sur* $\mathcal{C}$ *pour laquelle une famille de morphismes de* $\mathcal{C}$

$$(X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$$

est couvrante si sa transformée par le foncteur

$$\rho = f^* \circ \ell : \mathcal{C} \xrightarrow{\ell} \widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}$$

est globalement épimorphique.

(ii) *Si* $\mathcal{E} = \mathrm{Ens}$, *la topologie* J' *de* $\mathcal{C}$ *définie par un point*

$$\mathrm{Ens} \xrightarrow{p} \widehat{\mathcal{C}}_J$$

est nécessairement “à deux valeurs”.

Démonstration de (ii). – Tout sous-objet de l'objet terminal 1 de $\widehat{\mathcal{C}}_{J'}$ est transformé par p^* en un sous-objet de $\{\bullet\}$, qui est $\{\bullet\}$ ou $\emptyset$.

Sous-topos "à deux valeurs" et points de topos localiques :

A tout topos $\mathcal{E}$, on peut associer le treillis distributif O
des sous-objets de l'objet terminal 1 de $\mathcal{E}$:
en effet, les intersections finies $\wedge$ et unions arbitraires $\bigvee$
de sous-objets de 1 sont toujours définies dans $\mathcal{E}$,
et $\wedge$ est distributif par rapport à $\bigvee$.
L'ensemble ordonné O vu comme une catégorie,
et muni de la topologie définie par $\bigvee$,
définit un topos $\widehat{O}_{\bigvee}$ muni d'un morphisme $\quad \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{O}_{\bigvee}$.
Le topos $\mathcal{E}$ est dit "localique" si c'est un isomorphisme.

Lemme. – *Si $\mathcal{E}$ est un topos localique,*
tout sous-topos "à deux valeurs" de $\mathcal{E}$ provient d'un point de $\mathcal{E}$.

Démonstration. – Soit J une topologie sur O qui définit un sous-topos "à deux valeurs" de $\mathcal{E}$. Associons à tout objet $(X \hookrightarrow 1)$ de O

$$X \longmapsto \begin{cases} \emptyset & \text{si } X \hookrightarrow 1 \text{ n'est pas } J\text{-couvrant,} \\ \{\bullet\} & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Cela définit un point du topos $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \widehat{O}_{\bigvee}$.

Le topos des mesures de probabilités :

On considère toujours une famille $\mathcal{U}$ de parties d'un espace X, supposée stable par intersections finies et unions dénombrables.
On note toujours $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ la famille ordonnée des parties de $X^{\mathbb{N}}$ qui sont des réunions dénombrables d'intersections finies de parties de $X^{\mathbb{N}}$ de la forme

$$P^U_{\geq q}(X^{\mathbb{N}}) \quad \text{ou} \quad P^U_{\leq q}(X^{\mathbb{N}}) \quad \text{avec} \quad U \in \mathcal{U} \text{ et } q \in Q\,.$$

Ici, Q est une partie dénombrable et dense de $[0,1]$, stable par la relation $q_1 + q_2 = q_3 + q_4$ de $[0,1]^4$.

Corollaire. – *Soit $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ le topos localique des faisceaux sur le site*

$$(\mathcal{U}_{\mathbb{N}}, J_{\mathbb{N}})$$

*constitué de l'ensemble ordonné $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ muni de la topologie $J_{\mathbb{N}}$.
Alors on a une triple équivalence*

$$\mu \longleftrightarrow J_\mu \longleftrightarrow p_\mu$$

entre

- *les mesures de probabilités μ sur $\mathcal{U}$,*
- *les sous-topos $\mathcal{E}_\mu = \widehat{(\mathcal{U}_{\mathbb{N}})}_{J_\mu}$ de $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ qui sont "à deux valeurs",*
- *les points p_μ du topos $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$.*

Explicitation de la topologie qui définit le topos des mesures :

Le topos localique des mesures de probabilités sur $\mathcal{U}$

$$\mathcal{E}_{\mathbb{N}} = (\mathcal{U}_{\mathbb{N}})_{J_{\mathbb{N}}}$$

est défini comme le topos des faisceaux sur $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$
pour la topologie $J_{\mathbb{N}}$ qui a été introduite comme une topologie engendrée.
En voici une caractérisation :

Lemme. – *Une famille de morphismes $(P_i \hookrightarrow P)_{i \in I}$ de $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ est $J_{\mathbb{N}}$-couvrante si et seulement si elle contient une sous-famille dénombrable $(P_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la différence*

$$P - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_{i_n}$$

soit "négligeable" au sens de contenue dans une réunion dénombrable de parties de la forme

- $\{x_\bullet \in X^{\mathbb{N}} \mid p_-^U(x_\bullet) < p_+^U(x_\bullet)\}$ *avec* $U \in \mathcal{U}$,
- $\{x_\bullet \in X^{\mathbb{N}} \mid \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} p_-^{U_n}(x_\bullet) < p_-^U(x_\bullet)\}$

pour une suite croissante de parties $U_n \in \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$, de réunion $U = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Non trivialité des topos des mesures de probabilités :

On remarque :

Corollaire. – *Si $\mathcal{U}$ est une famille de parties d'un ensemble X non vide qui est stable par intersections finies et unions dénombrables, on a :*

(i) *Tout élément $x \in X$ définit une mesure de probabilités δ_x sur $\mathcal{U}$ par*

$$\mathcal{U} \ni U \longmapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in U\,, \\ 0 & si\ x \notin U\,. \end{cases}$$

(ii) *A fortiori, le topos localique des mesures de probabilités sur $\mathcal{U}$*

$$\mathcal{E}_{\mathbb{N}} = \widehat{(\mathcal{U}_{\mathbb{N}})}_{J_{\mathbb{N}}}$$

a toujours des points associés aux éléments $x \in X$, et la partie totale

$$X^{\mathbb{N}}$$

n'est jamais négligeable pour la topologie $J_{\mathbb{N}}$.