

Quelques remarques sur le principe de fonctorialité

Laurent LAFFORGUE



Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Octobre 2007

IHES/M/07/31

Quelques remarques sur le principe de functorialité

Laurent Lafforgue

*Institut des Hautes Études Scientifiques, 35 route de Chartres,
F-91440 Bures-sur-Yvette*

Introduction :

On s'intéresse au transfert automorphe entre groupes linéaires sur les corps de fonctions.

Ce transfert résulte de la correspondance de Langlands sur ces corps, mais on voudrait bien pouvoir le démontrer directement par des calculs sur les groupes adéliques, comme dans la théorie de l'endoscopie.

On montre que l'existence du transfert automorphe entre deux groupes linéaires quelconques est équivalente à l'égalité de deux fonctionnelles.

Chacune de ces fonctionnelles est définie comme résidu d'une certaine série formelle qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- c'est une fraction rationnelle, comme conséquence du théorème de décomposition spectrale de Langlands,
- tous ses coefficients sont donnés par des expressions explicites et "géométriques", c'est-à-dire obtenues en évaluant certaines fonctions adéliques en les points rationnels des groupes considérés.

On voit donc que, même si cela se fait d'une manière compliquée, le principe de functorialité peut s'exprimer en termes uniquement géométriques, qui ne font plus référence à l'analyse spectrale.

Nous étudions particulièrement le cas "non abélien" le plus simple qui est l'induction automorphe de $GL(1)$ à $GL(2)$ via une extension quadratique.

Même dans ce cas, nous ne savons pas démontrer directement l'énoncé géométrique voulu.

Les cinq exposés rassemblés ici ont été donnés à l'IHES en mai et juin 2006 puis répétés sous un autre angle dans le cadre de l'école d'été "Autour des motifs" organisée à l'IHES dans la deuxième quinzaine du mois de juillet 2006. Ils seront suivis d'autres publications qui permettront de généraliser et de préciser les conjectures des exposés IV et V.

Ce travail est inspiré par les récentes tentatives de Langlands pour aller "au-delà de l'endoscopie" (voir dans la bibliographie ses deux articles de 2004 et 2007).

L'auteur adresse ses profonds remerciements à Cécile Cheikhchoukh qui a assuré la frappe du manuscrit avec son efficacité habituelle.

Sommaire

Exposé I : Principe de diagonalisation

1. Groupes linéaires adéliques
2. Le théorème de décomposition spectrale de Langlands
3. L'expression spectrale des noyaux
4. Isomorphisme de Satake et groupe dual de Langlands
5. Le principe de fonctorialité de Langlands
6. Première idée de ce que l'on voudrait faire : comparer deux formules de traces "diagonales"
7. Diagonalisation d'un produit de formules de traces au moyen de séries formelles

Exposé II : Travail sur les noyaux

1. Expression locale concrète du transfert
2. Disparition des séries d'Eisenstein de type cuspidal
3. La formule d'inversion de Shalika
4. Comment retrouver les traces cuspidales

Exposé III : Développements asymptotiques

1. L'opérateur de Shalika appliqué aux séries d'Eisenstein
2. Diagonalisation des noyaux d'Eisenstein transformés
3. Le cas $G = \mathrm{GL}_2$: calcul de résidus
4. Le cas $G = \mathrm{GL}_2$: déplacement des contours d'intégration
5. Le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2
6. Développements asymptotiques et formules de traces
7. Développements asymptotiques et partie spectrale du principe de fonctorialité

Exposé IV : Et du côté géométrique ?

1. Expression géométrique des moyennes des noyaux tronqués
2. Modèles de Whittaker et décompositions spectrales locales
3. Convolution de deux noyaux de Whittaker locaux via un homomorphisme de transfert
4. Une conjecture vague d'interversion d'une limite et d'une somme

Exposé V : Des calculs géométriques et une conjecture dans le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2 ou GL_r

1. Le cas de l'induction automorphe quadratique de GL_1 à GL_2
2. Préparation au calcul des intégrales locales
3. Le cas où x est scindée et $k_1 + k_2 = 0$
4. Le cas où x est scindée et $k_1 + k_2 = 1$
5. Le cas où x est inerte et non ramifiée, et $h_x = \mathbf{1}_x$
6. Calcul des coefficients de Fourier locaux
7. Une conjecture pour le calcul de la moyenne sur les éléments rationnels, dans le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_r

Exposé I : Principe de diagonalisation

1 Groupes linéaires adéliques

On se placera toujours sur le corps des fonctions F d'une courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini \mathbb{F}_q .

On note $|X|$ l'ensemble des places de F identifiées aux points fermés de X .

Pour toute place $x \in |X|$, on note :

- F_x le complété x -adique de F ,
- O_x l'anneau des entiers de F_x ,
- $\deg(x)$ la dimension sur \mathbb{F}_q du corps résiduel $\kappa(x)$ de O_x , avec donc $|\kappa(x)| = q^{\deg(x)} = q_x$,
- $x : F_x^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ la valuation qui accorde la valeur 1 aux éléments uniformisants de O_x , et $|\bullet| = q_x^{-v_x(\bullet)}$ la norme associée.

On notera $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F et $O_{\mathbb{A}} = O_{\mathbb{A}_F}$ son sous-anneau des entiers.

On dispose de l'homomorphisme de degré

$$\begin{aligned} \deg : \quad \mathbb{A}^\times &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a_x)_{x \in |X|} &\mapsto - \sum_x \deg(x) \cdot x(a_x). \end{aligned}$$

Son noyau $\mathbb{A}^{\times 0}$ contient F^\times d'après la "formule du produit" et le quotient $F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0}$ est compact.

Pour nous, un "groupe linéaire sur F " sera un groupe algébrique réductif quasi-déployé sur F de la forme

$$G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}$$

où I_G est un ensemble fini d'indices et où, pour tout $i \in I_G$, E_i désigne une extension finie séparée de F et $\text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}$ désigne le groupe algébrique sur F déduit de GL_{r_i} par restriction des scalaires à la Weil de E_i à F .

Il lui est associé un groupe linéaire adélique

$$G(\mathbb{A}) = \prod_{i \in I_G} \text{GL}_{r_i}(\mathbb{A}_{E_i})$$

qui contient le sous-groupe ouvert compact maximal

$$\begin{aligned} K_0^G &= \prod_{i \in I_G} \text{GL}_{r_i}(O_{\mathbb{A}_{E_i}}) \\ &= \prod_{x \in |X|} K_{0,x}^G. \end{aligned}$$

On note \mathcal{M}_G l'ensemble fini des sous-groupes de Lévi "standard" de G , c'est-à-dire ceux dont la composante dans chaque $\text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}$ est un produit de blocs associé à une partition de l'entier r_i .

Le plus petit des sous-groupes de Lévi standard est le tore diagonal

$$T_G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \mathbb{G}_m^{r_i}.$$

Puis on note \mathcal{P}_G l'ensemble fini des sous-groupes paraboliques P de G dont le sous-groupe de Lévi M_P est élément de \mathcal{M}_G . Pour chaque $P \in \mathcal{P}_G$, on note N_P son radical unipotent.

On dispose du groupe de Weyl de G

$$W_G = \prod_{i \in I_G} \mathfrak{S}_{r_i}$$

et des sous-groupes de Weyl $W_M \subseteq W_G$ des sous-groupes de Lévi $M \in \mathcal{M}_G$.

Pour tous $P, P' \in \mathcal{P}_G$, on note $\text{Isom}(P, P')$ l'ensemble des doubles classes

$$w \in W_{M_{P'}} \backslash W_G / W_{M_P}$$

telles que

$$w^{-1} \cdot M_{P'} \cdot w = M_P,$$

ce qui implique

$$w^{-1} \cdot W_{M_{P'}} \cdot w = W_{M_P}.$$

Si $P, P', P'' \in \mathcal{P}_G$ et $w \in \text{Isom}(P, P')$, $w' \in \text{Isom}(P', P'')$, $w'w$ est bien défini en tant qu'élément de $\text{Isom}(P, P'')$, si bien que \mathcal{P}_G devient un groupoïde.

2 Le théorème de décomposition spectrale de Langlands

Le centre de G est

$$Z_G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \mathbb{G}_m,$$

et le centre de $G(\mathbb{A})$ est

$$Z_G(\mathbb{A}) = \prod_{i \in I_G} \mathbb{A}_{E_i}^\times.$$

Il contient comme sous-groupe fermé

$$\prod_{i \in I_G} \mathbb{A}_F^\times.$$

On choisit dans celui-ci un sous-groupe discret A_G tel que

$$A_G \hookrightarrow \prod_{i \in I_G} \mathbb{A}_F^\times \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}^{I_G}$$

soit injectif et de conoyau fini, et donc que A_G soit un sous-groupe discret et cocompact de $Z_G(F) \backslash Z_G(\mathbb{A})$.

Pour cela, on peut choisir par exemple une place $x_0 \in |X|$, un élément $a_0 \in F_{x_0}^\times$ de valuation non nulle, et poser $A_G = (a_0^{\mathbb{Z}})^{I_G}$.

Le quotient

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G$$

est localement compact et de volume fini pour la mesure de Haar dg sur $G(\mathbb{A})$ qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal K_0^G .

On s'intéresse à l'espace de Hilbert

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G)$$

muni de l'action par convolution à droite de l'algèbre de Hecke

$$\mathcal{H}^G = C_c^\infty(G(\mathbb{A})).$$

Plus généralement, si $M \in \mathcal{M}_G$ et

$$\chi : Z_M(F)\backslash Z_M(\mathbb{A})/A_G \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

est un caractère unitaire du centre $Z_M(\mathbb{A})$ de $M(\mathbb{A})$, on peut considérer l'espace de Hilbert

$$L^2(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/A_G, \chi)$$

des fonctions

$$\varphi : M(F)\backslash M(\mathbb{A})/A_G \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que

- $\varphi(z \cdot m) = \chi(z) \cdot \varphi(m)$, $\forall z \in Z_M(\mathbb{A})$, $\forall m \in M(\mathbb{A})$,
- $|\varphi|$ est de carré intégrable sur $M(F)\backslash M(\mathbb{A})/Z_M(\mathbb{A})$.

Cet espace de Hilbert $L^2(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/A_G, \chi)$ est muni d'une action par convolution à droite de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^M = C_c^\infty(M(\mathbb{A}))$. Il contient comme sous-espace fermé invariant l'espace

$$L_{\text{cusp}}^2(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/A_G, \chi)$$

des fonctions φ dites cuspidales au sens que

$$\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \varphi(n_P \cdot m) = 0, \quad \forall m \in M(\mathbb{A}),$$

pour tout sous-groupe parabolique $P \subsetneq M$ muni de la mesure de Haar dn_P de $N_P(\mathbb{A})$ qui attribue le volume 1 au quotient compact $N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})$.

Une représentation irréductible de \mathcal{H}^M de caractère central χ est dite "automorphe cuspidale" quand elle apparaît comme facteur direct de $L_{\text{cusp}}^2(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/A_G, \chi)$. On sait que cet espace est la somme directe hilbertienne de ces représentations, chacune apparaissant avec la multiplicité 1.

Plus généralement, une représentation irréductible de \mathcal{H}^M de caractère central χ est dite "automorphe discrète" quand elle apparaît comme facteur direct de $L^2(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/A_G, \chi)$ lequel, comme nous allons rappeler dans le cas $M = G$, n'est pas somme directe hilbertienne de ces représentations : il contient aussi un spectre continu.

Dans le but de donner la décomposition spectrale de $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G)$, appelons "paire discrète" la donnée d'un sous-groupe parabolique standard $P \in \mathcal{P}_G$ et d'une représentation irréductible automorphe discrète π de $M_P(\mathbb{A})$ dont le caractère central χ_π est trivial sur A_G .

Pour $P \in \mathcal{P}_G$, on désignera par

$$\rho_P : M_P(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$$

la racine carré du caractère modulaire de $M_P(\mathbb{A})$, définie par

$$m_P \cdot dn_P \cdot m_P^{-1} = \rho_P(m_P)^2 \cdot dn_P, \quad \forall m_P \in M_P(\mathbb{A}).$$

Pour toute paire discrète (P, π) , on note

$$L_\infty^2(M_P(F) N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/A_G, \pi)$$

l'espace des fonctions

$$\varphi : M_P(F) N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/A_G \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que

- φ est invariante à droite par un sous-groupe ouvert K de K_0^G ,
- pour tout élément $k \in K_0^G$, la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_k & : M_P(F) \backslash M_P(\mathbb{A}) / A_G \rightarrow \mathbb{C} \\ m & \mapsto \rho_P(m)^{-1} \cdot \varphi(m \cdot k) \end{aligned}$$

est dans le sous-espace π de $L^2(M_P(F) \backslash M_P(\mathbb{A}) / A_G, \chi_\pi)$. On note

$$\|\varphi\|^2 = \int_{K_0^G} dk \cdot \|\varphi_k\|^2,$$

si dk est la mesure de Haar de volume 1 sur K_0^G , c'est-à-dire la restriction de dg .

Pour tout $P \in \mathcal{P}_G$, on note $|P|$ le nombre total de blocs matriciels qui sont les facteurs du groupe algébrique linéaire M_P ; et on note Λ_P le tore complexe des caractères

$$M_P(\mathbb{A}) / A_G \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

qui se factorisent à travers

$$M_P(\mathbb{A}) \xrightarrow{\text{deg} \circ \text{Nm} \circ \text{det}} \mathbb{Z}^{|P|}.$$

La dimension de ce tore est $|P| - |I_G|$.

On note $\text{Im } \Lambda_P$ le sous-groupe réel compact de Λ_P constitué des caractères unitaires, et $\text{Re } \Lambda_P$ le sous-groupe réel des caractères à valeurs dans \mathbb{R}_+^\times , avec la décomposition

$$\Lambda_P = \text{Im } \Lambda_P \times \text{Re } \Lambda_P.$$

On met sur $\text{Im } \Lambda_P$ la mesure de Haar $d\lambda_P$ de volume 1.

On remarque que $\rho_P \in \text{Re } \Lambda_P$.

Tout caractère $\lambda_P \in \Lambda_P$ s'étend en un caractère de $P(\mathbb{A})$ via l'homomorphisme $P(\mathbb{A}) \rightarrow M_P(\mathbb{A})$, puis en une fonction sur $G(\mathbb{A})$ invariante à droite par K_0^G si on utilise la décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A}) \cdot K_0^G$ et l'invariance du caractère λ_P de $P(\mathbb{A})$ par le sous-groupe $P(\mathbb{A}) \cap K_0^G$.

Pour toute paire discrète (P, π) , notons alors

$$L_\infty^2(\text{Im } \Lambda_P \times M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G, \pi)$$

l'espace (dit "de Paley-Wiener") des fonctions

$$\Phi : \text{Im } \Lambda_P \times M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que l'application induite

$$\lambda_P \mapsto \Phi(\lambda_P, \bullet)$$

soit une combinaison linéaire finie à coefficients dans

$$L_\infty^2(M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G, \pi)$$

de caractères du tore $\text{Im } \Lambda_P$.

On munit cet espace de la norme hilbertienne

$$\|\Phi\|^2 = \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot \|\Phi(\lambda_P, \bullet)\|^2.$$

Rappelons la définition des séries d'Eisenstein : Si (P, π) est une paire discrète, $\varphi \in L_\infty^2(M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G, \pi)$ et $\lambda_P \in \Lambda_P$ est vu comme une fonction sur $G(\mathbb{A})$ invariante à droite par K_0^G , la série d'Eisenstein

$$E_P^G(\varphi, \lambda_P)$$

est définie sur un ouvert de Λ_P (constitué des λ_P tels que $|\lambda_P| \gg \rho_P$ au sens du paragraphe VI.1.b, page 281, du livre [Lafforgue, 1997]) par la série

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \ni g \mapsto \sum_{\delta \in P(F) \backslash G(F)} (\varphi \cdot \lambda_P)(\delta g)$$

qui converge absolument dans cet ouvert, et ailleurs par prolongement analytique ; elle n'a pas de pôle qui rencontre $\text{Im } \Lambda_P$.

Puis rappelons la définition des opérateurs d'entrelacement : Soit d'abord une paire discrète (P, π) et $P' \in \mathcal{P}_G$ un sous-groupe parabolique tel que $M_{P'} = M_P$. Cette égalité $M_{P'} = M_P$ induit une identification $\Lambda_{P'} = \Lambda_P$ et on peut noter $\lambda_{P'} \in \Lambda_{P'}$ l'image de tout $\lambda_P \in \Lambda_P$.

L'intégrale

$$M_{P'}^{P'}(\varphi, \lambda_P) : g \mapsto \int_{(N_P \cap N_{P'}) \backslash N_{P'}(\mathbb{A})} \frac{dn_{P'}}{dn_{P, P'}} \cdot (\varphi \cdot \lambda_P)(n_{P'} \cdot g) \cdot \lambda_{P'}^{-1}(g)$$

(où $dn_{P'}$ et $dn_{P, P'}$ désignent les mesures de Haar de covolume 1 relativement aux réseaux $N_{P'}(F)$ et $(N_P \cap N_{P'})(F)$) est absolument convergente sur un ouvert de Λ_P . Elle se prolonge analytiquement à Λ_P tout entier et aucun de ses pôles ne rencontre $\text{Im } \Lambda_P$. Si (P', π') est la paire discrète qui correspond à (P, π) via l'identité $M_{P'}(\mathbb{A}) = M_P(\mathbb{A})$, elle prend ses valeurs dans $L_\infty^2(M_{P'}(F) N_{P'}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G, \pi')$.

Si maintenant $P' \in \mathcal{P}_G$ est un sous-groupe parabolique standard relié à P par un élément

$$w \in \text{Isom}(P, P') \subseteq W_{M_{P'}} \backslash W_G / W_{M_P},$$

avec donc $w^{-1} \cdot M_{P'} \cdot w = M_P$, on définit une fonction méromorphe sur Λ_P à valeurs dans

$$L_\infty^2(M_{P'}(F) N_{P'}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G, w(\pi))$$

par la formule

$$M_{P', w}^{P'}(\varphi, \lambda_P)(g) = M_P^{w^{-1} \cdot P' \cdot w}(\varphi, \lambda_P)(w^{-1} \cdot g), \quad \forall g \in G(\mathbb{A}).$$

Pour toute paire discrète (P, π) , notons $\text{Fixe}(\pi)$ le groupe fini des couples

$$(w, \mu_P) \in \text{Aut}(P) \times \Lambda_P$$

tels que $w(\pi \otimes \mu_P) \cong \pi$.

Puis introduisons le sous-espace

$$L_{\infty, \text{fixe}}^2(\text{Im } \Lambda_P \times M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G, \pi)$$

de

$$L_\infty^2(\text{Im } \Lambda_P \times M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G, \pi)$$

constitué des fonctions

$$\Phi : \text{Im } \Lambda_P \times M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que, pour tout fixateur

$$(w, \mu_P) \in \text{Fixe}(\pi),$$

on ait

$$M_{P,w}^P(\Phi(\lambda_P \mu_P, \bullet), \lambda_P \mu_P) = \Phi(w(\lambda_P), \bullet), \quad \forall \lambda_P \in \text{Im } \Lambda_P.$$

En particulier, pour tout $\mu_P \in \text{Im } \Lambda_P$ tel que $\pi \otimes \mu_P \cong \pi$, on doit avoir $\Phi(\lambda_P \mu_P, \bullet) = \Phi(\lambda_P, \bullet)$, $\forall \lambda_P \in \text{Im } \Lambda_P$.

Disant que deux paires discrètes (P, π) et (P', π') sont équivalentes s'il existe un $w \in \text{Isom}(P, P')$ et un $\lambda_P \in \text{Im } \Lambda_P$ tels que $w(\pi \otimes \lambda_P) \cong \pi'$, nous pouvons maintenant énoncer le théorème de décomposition spectrale de Langlands :

Théorème I.1. – *Pour toute paire discrète (P, π) , l'application linéaire définie sur l'espace*

$$L_{\infty}^2(\text{Im } \Lambda_P \times M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G, \pi)$$

par la formule

$$\Phi \mapsto \frac{1}{|\text{Fixe}(\pi)|^{1/2}} \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot E_P^G(\Phi(\lambda_P, \bullet), \lambda_P)$$

induit une isométrie du sous-espace

$$L_{\infty, \text{fixe}}^2(\text{Im } \Lambda_P \times M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G, \pi)$$

sur un sous-espace de

$$L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G)$$

qui ne dépend que de la classe d'équivalence de (P, π) . Et elle est nulle sur le supplémentaire orthogonal de ce sous-espace $L_{\infty, \text{fixe}}^2$ dans $L_{\infty}^2(\text{Im } \Lambda_P \times M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G, \pi)$.

Elle induit par suite une isométrie du sous-espace complété

$$L_{\text{fixe}}^2(\text{Im } \Lambda_P \times M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G, \pi)$$

sur un sous-espace fermé de $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G)$.

Enfin, $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G)$ est la somme directe hilbertienne de ces sous-espaces fermés quand (P, π) décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires discrètes. \square

3 L'expression spectrale des noyaux

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^G = C_c^{\infty}(G(\mathbb{A}))$ agit par convolution à droite sur l'espace de Hilbert $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G)$. Elle agit d'ailleurs via l'algèbre quotient $\mathcal{H}^G / A_G = C_c^{\infty}(G(\mathbb{A}) / A_G)$ et l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^G &\longrightarrow \mathcal{H}^G / A_G \\ h &\longmapsto \left(g \mapsto \sum_{a \in A_G} h(g \cdot a) \right). \end{aligned}$$

Considérons donc un élément $h \in \mathcal{H}^G / A_G$. C'est une fonction

$$h : G(\mathbb{A}) / A_G \rightarrow \mathbb{C}$$

qui est à support compact et invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert K de K_0^G .

L'opérateur de Hecke associé est l'opérateur de convolution à droite par h dans l'espace des fonctions localement intégrables

$$\varphi : G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G \rightarrow \mathbb{C}.$$

Il est défini par la formule

$$\varphi \mapsto \varphi * h$$

où

$$(\varphi * h)(g') = \int_{G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \varphi(g' \cdot g^{-1}) \cdot h(g).$$

Il admet un noyau qui s'écrit

$$K_h(g', g) = \sum_{\gamma \in G(F)} h(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g'),$$

ce qui signifie que, pour toute fonction localement intégrable φ comme ci-dessus, on a

$$(\varphi * h)(g') = \int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot K_h(g', g) \cdot \varphi(g).$$

Pour tout sous-groupe parabolique standard $P \in \mathcal{P}_G$, on dispose aussi de l'opérateur de convolution à droite

$$\varphi \mapsto \varphi * h$$

dans l'espace des fonctions localement intégrables

$$M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/A_G \rightarrow \mathbb{C},$$

et, pour tout $\lambda_P \in \Lambda_P$, on dispose de l'opérateur composé

$$\varphi \mapsto ((\varphi \cdot \lambda_P) * h) \cdot \lambda_P^{-1} = h(\varphi, \lambda_P).$$

Pour toute paire discrète (P, π) , chacun de ces opérateurs envoie l'espace $L^2_\infty(M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/A_G, \pi)$ dans le sous-espace $L^2_K(M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/A_G, \pi)$ des fonctions invariantes à droite par K . Ce sous-espace est toujours de dimension finie et il est nul en dehors d'un ensemble fini de classes d'équivalence de paires discrètes (P, π) .

On a comme conséquence immédiate du théorème de décomposition spectrale :

Corollaire I.2. – *Pour toute fonction de Hecke*

$$h : G(\mathbb{A})/A_G \rightarrow \mathbb{C}$$

à support compact et invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert K de K_0^G , le noyau de l'opérateur de convolution à droite par h dans $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G)$ s'écrit comme une somme

$$K_h(g_1, g_2) = \sum_{(P, \pi)} K_h^{(P, \pi)}(g_1, g_2)$$

de termes de la forme

$$K_h^{(P, \pi)}(g_1, g_2) = \frac{1}{|\text{Fixe}(\pi)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot E_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P)(g_1) \cdot \overline{E_P^G(\varphi, \lambda_P)(g_2)}$$

où

- (P, π) décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires discrètes,
- $\mathcal{B}_K(P, \pi)$ désigne une base orthonormée finie de chaque espace $L^2_K(M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/A_G, \pi)$.

□

4 Isomorphisme de Satake et groupe dual de Langlands

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^G = C_0^\infty(G(\mathbb{A}))$ de notre groupe linéaire $G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}$ s'écrit comme le produit tensoriel infini

$$\mathcal{H}^G = \bigotimes_{x \in |X|} \mathcal{H}_x^G$$

des algèbres de Hecke locales $\mathcal{H}_x^G = C_0^\infty(G(F_x))$ munies chacune de l'élément idempotent distingué $\mathbf{1}_x$ qui est la fonction caractéristique du sous-groupe ouvert compact maximal $K_{0,x}^G = \prod_{i \in I_G} \text{GL}_{r_i}(O_{E_i,x})$ de $G(F_x)$.

On note $\mathcal{H}_{x,\phi}^G$ la sous-algèbre de Hecke "sphérique" de \mathcal{H}_x^G constituée des fonctions à support compact sur $G(F_x)$ invariantes à droite et à gauche par $K_{0,x}^G$.

On dispose dans G du tore maximal

$$T_G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \mathbb{G}_m^{r_i}.$$

Si pour tout entier r , on note B_r le sous-groupe de Borel de GL_r constitué des matrices triangulaires supérieures et N_r son radical unipotent, on dispose encore dans G du sous-groupe de Borel

$$B_G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} B_{r_i}$$

et de son radical unipotent

$$N_B = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} N_{r_i}.$$

Le tore T_G est un sous-groupe de Lévi de B_G .

En chaque place x , on peut mettre sur $N_B(F_x)$ la mesure de Haar $dn_{B,x}$ qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact

$$N_B(F_x) \cap K_{0,x}^G = \prod_{i \in I_G} N_{r_i}(O_{E_i,x}) = N_B(O_x),$$

et on peut munir $T_G(F_x)$ de la racine carrée $\rho_{B,x}$ du caractère modulaire de $B_G(F_x)$, définie par

$$t_x \cdot dn_{B,x} \cdot t_x^{-1} = \rho_{B,x}(t_x)^2 \cdot dn_{B,x}.$$

L'isomorphisme de Satake s'énonce :

Théorème I.3. – *En toute place x , l'application linéaire*

$$\mathcal{H}_{x,\phi}^G \ni h_x \mapsto \left[t_x \mapsto \rho_{B,x}(t_x) \cdot \int_{N_B(F_x)} dn_{B,x} \cdot h_x(t_x \cdot n_{B,x}) \right]$$

définit un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{H}_{x,\phi}^G$ sur l'algèbre des fonctions à support compact

$$T_G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui sont invariantes par le groupe de Weyl W_G et par le sous-groupe ouvert compact maximal

$$T_G(O_x) = T_G(F_x) \cap K_{0,x}^G = \prod_{i \in I_G} \mathbb{G}_m^{r_i}(O_{E_i,x}).$$

En particulier l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\phi}^G$ est commutative. \square

Référence pour la démonstration :

Voir l'article d'origine [Satake].

Dans notre situation – les groupes linéaires sur les corps de fonctions –, on peut lire le paragraphe 4.1 de [Laumon]. \square

Plaçons-nous maintenant en une place $x \in |X|$ où G est non ramifié au sens que toutes les extensions E_i de F , $i \in I_G$, sont non ramifiées au-dessus de F_x . Autrement dit, on a pour tout $i \in I_G$ une décomposition canonique

$$E_{i,x} = \prod_j F_{x,i,j}$$

où tous les facteurs $F_{x,i,j}$, qui sont en nombre fini, sont des extensions non ramifiées de F_x .

Le tore $T(F_x)$ contient un plus grand sous-tore déployé qui est

$$T_x = \prod_{i,j} F_x^{\times r_i} \hookrightarrow \prod_{i,j} F_{x,i,j}^{\times r_i} = T(F_x).$$

Et celui-ci contient comme sous-groupe ouvert compact maximal

$$T_{x,0} = \prod_{i,j} O_{F_x}^{\times r_i} = T_x \cap K_{0,x}^G.$$

De plus, le quotient $T(F_x)/T(O_x)$ s'identifie à $T_x/T_{x,0}$ puis, via les homomorphismes de valuation v_x , à $\prod_{i,j} \mathbb{Z}^{r_i}$.

On a prouvé :

Corollaire I.4. – Soit x une place où G est non ramifié, c'est-à-dire où tous les E_i sont non ramifiés sur F_x .

Et pour tout $i \in I_G$, soit $I_{i,x}$ l'ensemble fini des composantes de $E_{i,x} = E_i \otimes_F F_x$ sur F_x .

Alors l'isomorphisme de Satake s'écrit canoniquement

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\phi}^G \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} \mathbb{C} [X_{i,j,1}^{\pm 1}; \dots; X_{i,j,r_i}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_i}}.$$

\square

Rappelons maintenant que le groupe dual de

$$G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}$$

est

$$\hat{G} = \prod_{i \in I_G} \prod_{\iota: E_i \hookrightarrow \bar{F}} \text{GL}_{r_i}(\mathbb{C})$$

où, pour tout $i \in I_G$, on fait décrire à ι l'ensemble fini des plongements de E_i dans la clôture algébrique \bar{F} de F .

Chacun de ces ensembles $\{\iota : E_i \hookrightarrow \bar{F}\}$ est muni d'une action naturelle du groupe de Weil W_F de F , donc \hat{G} est lui-même muni d'une action de W_F et on peut poser

$${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F.$$

Considérons une place $x \in |X|$. Le choix d'une clôture algébrique \bar{F}_x de F_x détermine un groupe de Weil local W_{F_x} , et le choix d'un plongement $\bar{F} \hookrightarrow \bar{F}_x$ induit une immersion $W_{F_x} \hookrightarrow W_F$. Celle-ci ne dépend des choix qu'à conjugaison près par un élément de W_F .

Le groupe W_{F_x} est muni d'un homomorphisme surjectif canonique

$$W_{F_x} \twoheadrightarrow W_{\kappa(x)} = \text{Frob}_x^{\mathbb{Z}}$$

vers le groupe de Weil du corps résiduel $\kappa(x)$ en le point fermé x de la courbe X .

Supposons que les extensions E_i de F sont toutes non ramifiées en la place x . Alors l'action de W_{F_x} sur \hat{G} se factorise à travers $W_{\kappa(x)}$ et on peut considérer le produit restreint

$${}^L G_x = \hat{G} \rtimes W_{\kappa(x)}.$$

On note encore \hat{G}_x la fibre de ${}^L G_x$ au-dessus de l'élément générateur Frob_x de $W_{\kappa(x)}$ (défini comme l'automorphisme d'élevation à la puissance $|\kappa(x)| = q^{\deg(x)} = q_x$ dans n'importe quelle clôture algébrique du corps fini $\kappa(x)$). Comme le groupe $W_{\kappa(x)}$ est commutatif, elle est invariante par conjugaison par les éléments de ${}^L G_x$ et en particulier par ceux de \hat{G} .

On a encore :

Proposition I.5. – *Soit x une place où tous les E_i sont non ramifiés sur F_x .*

Alors l'isomorphisme de Satake induit un isomorphisme de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\phi}^G$ sur l'algèbre des fonctions régulières sur \hat{G}_x qui sont invariantes par conjugaison par les éléments de \hat{G} .

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $i \in I_G$, l'ensemble $I_{i,x}$ des facteurs de $E_{i,x} = E_i \otimes_F F_x$ s'identifie à l'ensemble des orbites de Frob_x agissant sur l'ensemble des plongements $\{\iota : E_i \hookrightarrow \bar{F}\}$. □

5 Le principe de functorialité de Langlands

Une représentation de $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(F_x)$ pour une place $x \in |X|$] est dite “lisse admissible” si

- tout vecteur de cette représentation est invariant par un sous-groupe ouvert de $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(F_x)$],
- pour tout tel sous-groupe ouvert, le sous-espace de la représentation constitué des vecteurs invariants par ce sous-groupe est de dimension finie.

Une représentation lisse admissible de $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(F_x)$] peut aussi bien être considérée comme une représentation de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^G = C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ [resp. $\mathcal{H}_x^G = C_c^\infty(G(F_x))$].

Toute représentation lisse admissible irréductible π de $G(\mathbb{A})$ se décompose canoniquement comme un produit tensoriel infini

$$\pi = \bigotimes_{x \in |X|} \pi_x,$$

où

- chaque facteur π_x , $x \in |X|$, est une représentation lisse admissible irréductible de $G(F_x)$,
- pour presque toute place x (c'est-à-dire pour toute place x sauf un nombre fini), la représentation locale π_x est “non ramifiée” au sens que son sous-espace $\pi_{x,\phi}$ des vecteurs invariants par le sous-groupe ouvert compact maximal $K_{0,x}^G = \prod_{i \in I_G} \text{GL}_{r_i}(O_{E_i,x})$ est non nul.

Réciproquement, si des π_x sont des représentations des groupes locaux $G(F_x)$, $x \in |X|$, qui vérifient ces propriétés, leur produit tensoriel est une représentation lisse admissible irréductible de $G(\mathbb{A})$.

On a :

Lemme I.6. – *Se donner une représentation lisse, admissible, irréductible et non ramifiée π_x de $G(F_x)$ équivaut à se donner son sous-espace $\pi_{x,\phi}$ comme espace de dimension 1 muni de l'action par un caractère de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\phi}^G$.*

D'après l'isomorphisme de Satake

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\phi}^G \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} \mathbb{C}[X_{i,j,1}^{\pm 1}; \dots; X_{i,j,r_i}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_i}},$$

cela revient à se donner une famille de nombres complexes

$$z(\pi_x) \in \prod_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} (\mathbb{C}^\times)^{(r_i)}$$

appelés les valeurs propres de Hecke de π_x . □

On pourra appeler “spectre automorphe” de $G(\mathbb{A})/A_G$ et on notera $\Pi_{\text{aut}}(G(\mathbb{A})/A_G)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses admissibles irréductibles de $G(\mathbb{A})$ qui apparaissent (discrètement ou continûment) dans le Théorème I.1 de décomposition spectrale de Langlands de $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G)$.

Ses éléments sont indexés par

- une paire discrète (P, π) (dans l'ensemble de représentants des classes d'équivalence choisi),
- un caractère $\lambda_P \in \text{Im } \Lambda_P$,

modulo l'action des groupes finis $\text{Fixe}(\pi)$.

On dispose des sous-ensembles naturels de Π_{aut} :

Π_{cusp} qui correspond à $P = G$ et π cuspidale,

$\Pi_{\text{disc,nc}}$ qui correspond à $P = G$ et π non cuspidale,

Π_{disc} qui est la réunion de Π_{cusp} et $\Pi_{\text{disc,nc}}$,

Π_{Eis} qui correspond à $P \subsetneq G$,

$\Pi_{\text{Eis,cusp}}$ qui correspond à $P \subsetneq G$ et π cuspidale,

$\Pi_{\text{Eis,nc}} = \Pi_{\text{Eis}} - \Pi_{\text{Eis,cusp}}$.

On connaît encore le théorème de rigidité de Piatetski-Shapiro (pour lequel on renvoie au court exposé [Piatetski-Shapiro] et à l'article [Jacquet, Shalika], p. 553) :

Théorème I.7. – *Soit $S \subset |X|$ un ensemble fini de places et $\pi, \pi' \in \Pi_{\text{aut}}$ deux représentations du spectre automorphe de G telles que, en toute place $x \notin S$, π_x et π'_x soient non ramifiées et $z(\pi_x) = z(\pi'_x)$.*

Alors $\pi = \pi'$. □

Considérons maintenant un second groupe linéaire H sur F , et un homomorphisme

$${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F \xrightarrow{\rho} {}^L H = \hat{H} \rtimes W_F$$

rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} {}^L G & \xrightarrow{\rho} & {}^L H \\ & \searrow & \swarrow \\ & & W_F \end{array}$$

En passant aux composantes connexes des abélianisés, on en déduit un homomorphisme de tores

$$\prod_{i \in I_G} \mathbb{C}^\times \rightarrow \prod_{i' \in I_H} \mathbb{C}^\times$$

puis un homomorphisme dual

$$\prod_{i' \in I_H} \mathbb{G}_m \rightarrow \prod_{i \in I_G} \mathbb{G}_m.$$

On supposera toujours que les sous-groupes discrets A_G et A_H de $G(\mathbb{A})$ et $H(\mathbb{A})$ sont tels que $A_H \subset \prod_{i' \in I_H} \mathbb{A}_F^\times$ s'envoie dans $A_G \subset \prod_{i \in I_G} \mathbb{A}_F^\times$ par l'homomorphisme induit entre tores adéliques.

En toute place $x \in |X|$ où les groupes linéaires G et H sont non ramifiés, l'homomorphisme

$${}^L G \xrightarrow{\rho} {}^L H$$

est dit lui-même non ramifié quand sa restriction au-dessus du groupe de Weil local W_{F_x} se factorise en un homomorphisme réduit :

$$\begin{array}{ccc} {}^L G_x = \hat{G} \rtimes W_{\kappa(x)} & \xrightarrow{\rho_x} & {}^L H_x = \hat{H} \rtimes W_{\kappa(x)} \\ & \searrow & \swarrow \\ & W_{\kappa(x)} & \end{array}$$

Il résulte de la Proposition I.5 que ρ_x induit alors un homomorphisme entre algèbres de Hecke sphériques

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\phi}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x,\phi}^G.$$

Comme les représentations irréductibles non ramifiées correspondent aux caractères des algèbres de Hecke sphériques, l'homomorphisme ρ_x^* permet d'associer à toute représentation irréductible non ramifiée π_x de $G(F_x)$ une représentation irréductible non ramifiée π'_x de $H(F_x)$, ce qu'on notera

$$\pi'_x = (\rho_x)_* (\pi_x)$$

ou encore

$$z(\pi'_x) = (\rho_x)_* (z(\pi_x)).$$

Par définition, on a donc

$$\pi'_x = (\rho_x)_* (\pi_x)$$

si et seulement si, pour toute fonction $h_x \in \mathcal{H}_{x,\phi}^H$,

$$\mathrm{Tr}_{\pi'_x}(h_x) = \mathrm{Tr}_{\pi_x}(\rho_x^*(h_x)).$$

On supposera toujours que l'homomorphisme ρ est non ramifié en presque toutes les places.

Définition I.8. – *Etant donnés deux éléments des spectres automorphes*

$$\pi \in \Pi_{\mathrm{aut}}(G(\mathbb{A})/A_G), \quad \pi' \in \Pi_{\mathrm{aut}}(H(\mathbb{A})/A_H),$$

on dira que π' est un transfert de π si, en presque toute place $x \in |X|$ où G, H, ρ, π et π' sont non ramifiés, on a

$$\pi'_x = (\rho_x)_* (\pi_x).$$

Si $\pi \in \Pi_{\text{aut}}(G)$ admet un transfert $\pi' \in \Pi_{\text{aut}}(H)$, il est nécessairement unique et on pourra noter

$$\pi' = \rho_*(\pi).$$

Rappelons maintenant l'énoncé du principe de functorialité, qui est connu dans le cas des groupes linéaires sur les corps de fonctions, comme conséquence de la correspondance de Langlands :

Théorème I.9. –

(i) Dans les conditions où nous sommes, toute représentation automorphe cuspidale $\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G(\mathbb{A})/A_G)$ admet un transfert $\pi' = \rho_*(\pi)$ dans $\Pi_{\text{cusp}}(H(\mathbb{A})/A_H)$ ou $\Pi_{\text{Eis, cusp}}(H(\mathbb{A})/A_H)$.

(ii) Il est même possible de définir en toute place $x \in |X|$ un homomorphisme linéaire (mais qui ne respecte pas en général la structure d'algèbre)

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_x^H \rightarrow \mathcal{H}_x^G$$

tel que :

- il prolonge celui déjà défini $\mathcal{H}_{x,\phi}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x,\phi}^G$ quand G et H sont non ramifiés en x ,
- si $\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G)$, $\pi' = \rho_*(\pi)$ et $h_x \in \mathcal{H}_x^H$, on a

$$\text{Tr}_{\pi'_x}(h_x) = \text{Tr}_{\pi_x}(\rho_x^*(h_x)).$$

Remarque. En combinant ce théorème avec la description du spectre automorphe résiduel dans l'article [Mœglin, Waldspurger, 1989] on montre que toute représentation du spectre automorphe $\pi \in \Pi_{\text{aut}}(G(\mathbb{A})/A_G)$ admet un transfert dans le spectre automorphe $\Pi_{\text{aut}}(H(\mathbb{A})/A_H)$. \square

Démonstration.

(i) Choisissons un nombre premier ℓ et un isomorphisme algébrique entre \mathbb{C} et une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ de \mathbb{Q}_ℓ .

D'après le théorème VI.9, page 158, de l'article [Lafforgue, 2002], il existe une bijection, échangeant valeurs propres de Hecke et valeurs propres de Frobenius en les places sans ramification, entre l'ensemble des représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A})$ et l'ensemble des relèvements continus, non ramifiés presque partout et irréductibles :

$$W_F \rightarrow {}^L G(\bar{\mathbb{Q}}_\ell) = \check{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \rtimes W_F$$

À une représentation $\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G(\mathbb{A})/A_G)$, on peut donc associer un relèvement $W_F \rightarrow {}^L G(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ puis l'homomorphisme composé :

$$W_F \rightarrow {}^L G(\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\rho} {}^L H(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

Si celui-ci est irréductible, il correspond à une représentation $\pi' = \rho_*(\pi)$ dans $\Pi_{\text{cusp}}(H(\mathbb{A})/A_H)$. Sinon, sa semi-simplification correspond à une représentation $\pi' = \rho_*(\pi)$ dans $\Pi_{\text{Eis, cusp}}(H(\mathbb{A})/A_H)$.

(ii) Il résulte de la proposition VII.4, page 196, de l'article [Lafforgue, 2002] que si $\pi' = \rho_*(\pi)$, la composante π'_x de π' en toute place x ne dépend que de la composante π_x de π et de la restriction de ρ au-dessus de W_{F_x} . L'assertion résulte alors de l'indépendance linéaire des fonctionnelles de traces associées aux différentes représentations lisses admissibles irréductibles de $G(F_x)$. \square

Le premier cas “non-abélien” est celui de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2 via une extension quadratique E de F .

Cette extension correspond à un homomorphisme surjectif

$$W_F \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathfrak{S}_2.$$

On prend $G = \text{Res}_{E/F} \text{GL}_1$ et $H = \text{GL}_2$ avec donc

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \text{GL}_2(\mathbb{C}), \\ {}^L H &= \hat{H} \times W_F, \\ \hat{G} &= \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times\end{aligned}$$

muni de l'action de W_F induite par $W_F \rightarrow \mathfrak{S}_2$ et la permutation des 2 facteurs,

$${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F.$$

Alors $\rho : {}^L G \rightarrow {}^L H$ est défini en associant à tout $((\lambda_1, \lambda_2), \sigma) \in \hat{G} \rtimes W_F$

- $\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \sigma \right)$ si l'image de σ dans \mathfrak{S}_2 est triviale,
- $\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \sigma \right)$ si l'image de σ dans \mathfrak{S}_2 est non triviale.

Voyons maintenant ce qui se passe entre algèbres de Hecke sphériques.

En toute place $x \in |X|$, l'isomorphisme de Satake pour H s'écrit

$$S_x^H : \mathcal{H}_{x,\phi}^H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[Y_1^\pm, Y_2^\pm]^{\mathfrak{S}_2}.$$

En toute place $x \in |X|$ où E est scindée sur F , l'isomorphisme de Satake pour G s'écrit

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\phi}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1^\pm] \otimes \mathbb{C}[X_2^{\pm 1}] = \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}]$$

et l'homomorphisme $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\phi}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x,\phi}^G$ consiste à substituer $Y_1 \mapsto X_1, Y_2 \mapsto X_2$.

Enfin, en toute place $x \in |X|$ où E est non ramifiée et inerte sur F , l'isomorphisme de Satake pour G s'écrit

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\phi}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X^{\pm 2}] = \mathbb{C}[X^{\pm 1}, -X^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_2}$$

et l'homomorphisme $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\phi}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x,\phi}^G$ consiste à substituer $Y_1 \mapsto X, Y_2 \mapsto -X$.

6 Première idée de ce que l'on voudrait faire : comparer deux formules de traces “diagonales”

Nous voudrions imaginer une approche purement adélique du Théorème I.9, qui ne fasse pas appel à la géométrie des chtoucas de Drinfeld.

Considérons toujours notre groupe algébrique linéaire

$$G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}.$$

Si $K = \prod_{x \in |X|} K_x$ est un sous-groupe ouvert du sous-groupe compact maximal $K_0^G = \prod_{x \in |X|} K_{0,x}^G$, on peut

considérer la sous-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_K^G = \bigotimes_{x \in |X|} \mathcal{H}_{x,K}^G$ de $\mathcal{H}^G = C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ constituée des fonctions in-

variantes à droite et à gauche par K , ainsi que les sous-ensembles $\Pi_{\text{aut},K}(G(\mathbb{A})/A_G), \Pi_{\text{cusp},K}(G(\mathbb{A})/A_G), \dots$ de $\Pi_{\text{aut}}(G(\mathbb{A})/A_G), \Pi_{\text{cusp}}(G(\mathbb{A})/A_G), \dots$ constitués des représentations irréductibles π du spectre automorphe dont le sous-espace π_K des vecteurs invariants par K n'est pas nul. Les sous-ensembles $\Pi_{\text{cusp},K}$ et $\Pi_{\text{disc},K}$ sont finis.

On rappelle que la formule des traces d'Arthur-Selberg (que l'on ne donne pas sous une forme précise car ce n'est finalement pas d'elle que l'on se servira) consiste en une égalité entre deux sommes finies de fonctionnelles linéaires sur les fonctions $h \in \mathcal{H}_K^G/A_G$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in \Pi_{\text{cusp}, K}(G(\mathbb{A})/A_G)} \text{Tr}_\pi(h) + \sum_{\pi \in \Pi_{\text{disc, nc}, K}(G(\mathbb{A})/A_G)} \text{Tr}_\pi(h) + \sum_{\substack{(P, \pi) \\ P \subsetneq G}} \text{Tr}_{P, \pi}^{\text{Ar}}(h) \\ &= \int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \Lambda K_h(g, g) \end{aligned}$$

où

- Ar est un certain opérateur linéaire “de troncature d'Arthur” qu'on applique au noyau de l'action de h réduit à la diagonale

$$g \mapsto K_h(g, g) = \sum_{\gamma \in G(F)} h(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g),$$

- les (P, π) décrivent l'ensemble fini des représentants des classes de paires discrètes tels que $P \subsetneq G$ et que $\pi_K \neq 0$,
- chaque $\text{Tr}_{P, \pi}^{\text{Ar}}(h)$ est un opérateur linéaire en h (qui n'est pas une trace), il dépend de l'opérateur de troncature Ar et de l'action de h sur l'espace de Paley-Wiener

$$L_K^2(\text{Im } \Lambda_P \times M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/A_G, \pi).$$

Dans cette égalité, la partie gauche est appelée “partie spectrale” et celle de droite “partie géométrique”. En faisant passer les autres termes spectraux de l'autre côté, on a donc en principe une formule pour

$$\text{Tr}_{\text{cusp}}(h) = \sum_{\pi \in \Pi_{\text{cusp}, K}} \text{Tr}_\pi(h)$$

ou pour

$$\text{Tr}_{\text{disc}}(h) = \sum_{\pi \in \Pi_{\text{disc}, K}} \text{Tr}_\pi(h).$$

Considérons maintenant un autre groupe linéaire H et un homomorphisme non ramifié presque partout

$$\begin{array}{ccc} L_G & \xrightarrow{\rho} & L_H \\ & \searrow & \swarrow \\ & W_F & \end{array}$$

tel que l'homomorphisme induit

$$\prod_{i' \in I_H} \mathbb{G}_m \rightarrow \prod_{i \in I_G} \mathbb{G}_m$$

envoie A_H dans A_G .

Fixons un sous-ensemble fini $S_0 \subset |X|$ tel que, en toute place $x \notin S_0$, les groupes G et H soient non ramifiés sur F , ρ soit non ramifié et $K_x = K_{0,x}^G$. Puis choisissons un sous-groupe ouvert $K' = \prod_{x \in |X|} K'_x$ de

$$K_0^H = \prod_{x \in |X|} K_{0,x}^H \text{ tel que}$$

- $K'_x = K_{0,x}^H, \forall x \notin S_0$,
- pour toute place $x \in S_0$, K'_x est assez petit en fonction de K_x et de la ramification de G, H et ρ .

Toute représentation automorphe cuspidale $\pi \in \Pi_{\text{cusp},K}(G)$ doit admettre un transfert par ρ dans $\Pi_{\text{cusp},K}(H)$ ou $\Pi_{\text{Eis,cusp},K}(H)$.

Première idée de démarche I.10. –

(i) *A partir de la formule des traces d'Arthur-Selberg pour G , trouver une formule géométrique pour*

$$(\text{Tr}_{\text{cusp}} * \text{Tr}_{\text{cusp}})(h_1, h_2) = \sum_{\pi \in \Pi_{\text{cusp},K}} \text{Tr}_{\pi}(h_1) \cdot \text{Tr}_{\pi}(h_2)$$

comme fonctionnelle en $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_K^G$.

(ii) *A partir des formules des traces d'Arthur-Selberg pour G et H , trouver une formule géométrique pour*

$$(\text{Tr}_{\text{cusp}} *_{\rho} \text{Tr})(h, h') = \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\text{cusp},K}(G) \\ \pi' \in \Pi_{\text{aut},K}(H) \\ \pi' = \rho_* \pi}} \text{Tr}_{\pi}(h) \cdot \text{Tr}_{\pi'}(h')$$

comme fonctionnelle en $h \in \mathcal{H}_K^G$ et $h' \in \mathcal{H}_{K'}^H$.

(iii) *Définir des homomorphismes linéaires*

$$\mathcal{H}_{x,K'_x}^H \xrightarrow{\rho_x^*} \mathcal{H}_{x,K_x}^G$$

prolongeant celles déjà spécifiées en toutes les places x où G et H sont non ramifiées

$$\mathcal{H}_{x,\phi}^H \xrightarrow{\rho_x^*} \mathcal{H}_{x,\phi}^G$$

telles que soit vérifiée l'égalité

$$(\text{Tr}_{\text{cusp}} *_{\rho} \text{Tr})(h, h') = (\text{Tr}_{\text{cusp}} * \text{Tr}_{\text{cusp}})(h, \rho^* h')$$

entre fonctionnelles en $h \in \mathcal{H}_K^G$ et $h' \in \mathcal{H}_{K'}^H$.

Remarque. Pour mettre en œuvre une telle stratégie, on rencontrera inévitablement les questions suivantes :

- (1) Comment réaliser ces restrictions à la diagonale ou au graphe de ρ_* ?
- (2) Comment faire disparaître les termes de la formule des traces pour G qui proviennent des séries d'Eisenstein ?
- (3) Comment faire disparaître les termes discrets non cuspidaux de la formule des traces ?
- (4) Comment ne pas faire disparaître les représentations cuspidales $\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G)$ dont le transfert $\rho_* \pi$ n'est pas dans $\Pi_{\text{cusp}}(H)$ mais dans $\Pi_{\text{Eis,cusp}}(H)$?
- (5) Comment comparer les formules “géométriques” obtenues ?

Dans cet exposé et les suivants, nous allons apporter des réponses (parmi d'autres possibles sans doute) pour les questions (1) à (4), mais pas pour la question (5).

Commençons par la question (1).

7 Diagonalisation d'un produit de formules de traces au moyen de séries formelles

Considérons toujours notre homomorphisme compatible

$$\begin{array}{ccc} L_G & \xrightarrow{\rho} & L_H \\ & \searrow & \swarrow \\ & W_F & \end{array}$$

ainsi que les sous-groupes ouverts $K = \prod_{x \in |X|} K_x$ de K_0^G et $K' = \prod_{x \in |X|} K'_x$ de K_0^H , et que la partie finie $S_0 \subset |X|$ en dehors de laquelle G , H , ρ , K et K' sont non ramifiés.

On a le lemme facile suivant :

Lemme I.11. – *On peut trouver une partie finie $S \subset |X| - S_0$ telle que pour toute paire de représentations des spectres discrets*

$$\begin{aligned} \pi &\in \Pi_{\text{disc}, K}(G(\mathbb{A})/A_G), \\ \pi' &\in \Pi_{\text{disc}, K'}(H(\mathbb{A})/A_H), \end{aligned}$$

vérifiant

$$\pi'_x = (\rho_x)_*(\pi_x), \quad \forall x \in S,$$

on ait nécessairement

$$\pi'_x = (\rho_x)_*(\pi_x), \quad \forall x \in |X| - S_0,$$

et donc $\pi' = \rho_(\pi)$.*

Démonstration. Cela résulte simplement de ce que les ensembles $\Pi_{\text{disc}, K}(G(\mathbb{A})/A_G)$ et $\Pi_{\text{disc}, K'}(H(\mathbb{A})/A_H)$ sont finis. \square

Avec les notations du Corollaire I.4, considérons en n'importe quelle place $x \in S$ les isomorphismes de Satake pour les algèbres de Hecke sphériques de G et H

$$\begin{aligned} S_x^G : \mathcal{H}_{x, \phi}^G &\xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i, x}}} \mathbb{C}[X_{i, j, 1}^{\pm 1}; \dots; X_{i, j, r_i}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_i}}, \\ S_x^H : \mathcal{H}_{x, \phi}^H &\xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{i' \in I_H \\ j' \in I_{i', x}}} \mathbb{C}[X_{i', j', 1}^{\pm 1}; \dots; X_{i', j', r_{i'}}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_{i'}}}. \end{aligned}$$

On a encore :

Lemme I.12. – *Pour tout $x \in S$, on peut trouver une série formelle $\Delta_x^{G, H}(\bullet, \bullet, Z)$ en la variable Z et à coefficients dans le produit tensoriel*

$$\left(\bigotimes_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i, x}}} \mathbb{C}[X_{i, j, 1}^{\pm 1}; \dots; X_{i, j, r_i}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_i}} \right) \otimes \left(\bigotimes_{\substack{i' \in I_H \\ j' \in I_{i', x}}} \mathbb{C}[X_{i', j', 1}^{\pm 1}; \dots; X_{i', j', r_{i'}}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_{i'}}} \right)$$

telle que :

- cette série formelle soit une fraction rationnelle, quotient d'un polynôme en la variable Z et à coefficients dans le produit tensoriel ci-dessus par un autre tel polynôme dont le coefficient constant est égal à 1 ;
- pour toute spécialisation des valeurs propres de Hecke

$$z \in \prod_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} (\mathbb{C}^\times)^{(r_i)},$$

$$z' \in \prod_{\substack{i' \in I_H \\ j' \in I_{i',x}}} (\mathbb{C}^\times)^{(r_{i'})},$$

la fraction rationnelle

$$\Delta_x^{G,H}(z, z', Z)$$

soit bien définie au point $Z = 1$ et vérifie

$$\lim_{Z \rightarrow 1} \Delta_x^{G,H}(z, z', Z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z' = (\rho_x)_*(z), \\ 0 & \text{si } z' \neq (\rho_x)_*(z). \end{cases}$$

Remarque. Il existe beaucoup de solutions différentes à ce problème puisque par exemple, si $\Delta_x^{G,H}$ est une fraction rationnelle qui satisfait les conditions requises, toutes ses puissances les satisfont aussi.

Démonstration du lemme. Il suffit d'exhiber une solution.

Comme ρ_x^* est un homomorphisme d'algèbres qui relie les deux algèbres de Hecke sphériques, il suffit de traiter le cas où $G = H$ et ρ est l'homomorphisme identique. En effet, si $\Delta_x^{H,H}(\bullet, \bullet, Z)$ est une série formelle en Z qui vérifie les conditions du lemme dans le cas de l'homomorphisme identique de ${}^L H$, alors la série formelle en Z qui s'en déduit en transformant ses coefficients par l'homomorphisme d'algèbres

$$\rho_x^* \otimes \text{Id} : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \otimes \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \otimes \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$$

vérifie les conditions du lemme relativement à notre homomorphisme $\rho : {}^L G \rightarrow {}^L H$.

Supposons donc que $G = H$ et que ρ est l'homomorphisme identique de ${}^L G$.

Puisqu'on peut faire des produits sur les indices i et j , on peut même se limiter au cas où notre algèbre de Hecke sphérique est isomorphe à

$$\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_r}.$$

On dédouble les variables $X_{\bullet}^{\pm 1}$ en $X'_{\bullet}^{\pm 1}$ et alors on peut prendre

$$\Delta_x^{G,G}(X_{\bullet}^{\pm 1}, X'_{\bullet}^{\pm 1}, Z) = \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq r} \left(1 - Z \frac{X_i}{X_j}\right) \cdot \prod_{1 \leq i, j \leq r} \left(1 - Z \frac{X'_i}{X'_j}\right)}{\prod_{1 \leq i, j \leq r} \left(1 - Z \frac{X_i}{X'_j}\right) \cdot \prod_{1 \leq i, j \leq r} \left(1 - Z \frac{X'_i}{X_j}\right)}.$$

En effet, si l'on spécialise les X_i et les X'_i en des $z_i \in \mathbb{C}^\times$ et des $z'_i \in \mathbb{C}^\times$, le facteur $1 - Z$ apparaît dans la fraction rationnelle

$$\Delta_x^{G,G}((z_i)_{1 \leq i \leq r}, (z'_i)_{1 \leq i \leq r}, Z)$$

avec l'exposant

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{C}^\times} (\#\{1 \leq i \leq r \mid z_i = \alpha\})^2 + \sum_{\alpha \in \mathbb{C}^\times} (\#\{1 \leq i \leq r \mid z'_i = \alpha\})^2 \\ & - 2 \cdot \sum_{\alpha \in \mathbb{C}^\times} (\#\{1 \leq i \leq r \mid z_i = \alpha\}) \cdot (\#\{1 \leq i \leq r \mid z'_i = \alpha\}) \\ & = \sum_{\alpha \in \mathbb{C}^\times} (\#\{1 \leq i \leq r \mid z_i = \alpha\} - \#\{1 \leq i \leq r \mid z'_i = \alpha\})^2. \end{aligned}$$

Cet exposant est toujours positif ou nul. Il ne vaut 0 que lorsque les deux familles $(z_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $(z'_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont égales à permutation près. \square

Voyons ce que cela donne dans le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2 via une extension quadratique E de F , avec donc

$$G = \mathrm{Res}_{E/F} \mathrm{GL}_1 \quad \text{et} \quad H = \mathrm{GL}_2.$$

En toute place $x \in S$ où E est scindée sur F , l'homomorphisme $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\phi}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x,\phi}^G$ s'écrit

$$\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_2} \hookrightarrow \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}],$$

si bien qu'on peut prendre pour $\Delta_x^{G,H}(X_\bullet, X'_\bullet, Z)$

$$\frac{(1-Z)^4 \cdot (1-Z \frac{X_1}{X_2})(1-Z \frac{X_2}{X_1}) \cdot (1-Z \frac{X'_1}{X_2})(1-Z \frac{X'_2}{X_1})}{(1-Z \frac{X_1}{X'_1})(1-Z \frac{X_2}{X'_2})(1-Z \frac{X'_1}{X_2})(1-Z \frac{X'_2}{X_1}) \cdot (1-Z \frac{X_1}{X_1})(1-Z \frac{X_2}{X_2})(1-Z \frac{X'_1}{X_2})(1-Z \frac{X'_2}{X_1})}.$$

Et en toute place $x \in S$ où E est inerte sur F , l'homomorphisme $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\phi}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x,\phi}^G$ s'écrit

$$\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_2} \rightarrow \mathbb{C}[X^{\pm 1}, -X^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_2},$$

si bien qu'on peut prendre pour $\Delta_x^{G,H}(X_\bullet, X'_\bullet, Z)$

$$\frac{(1-Z)^4 \cdot (1+Z)^2 \cdot (1-Z \frac{X'_1}{X_2})(1-Z \frac{X'_2}{X_1})}{(1-Z \frac{X_1}{X'_1})(1+Z \frac{X_2}{X'_2})(1-Z \frac{X_1}{X_2})(1+Z \frac{X_2}{X_1}) \cdot (1-Z \frac{X'_1}{X_1})(1+Z \frac{X'_2}{X_2})(1+Z \frac{X'_1}{X_2})(1-Z \frac{X'_2}{X_1})}.$$

Revenons maintenant au cas général

$$\begin{array}{ccc} {}^L G & \xrightarrow{\rho} & {}^L H \\ & \searrow & \swarrow \\ & W_F & \end{array}$$

En toute place $x \in S$, les isomorphismes de Satake permettent de voir

$$\Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z)$$

comme une série formelle élément de

$$(\mathcal{H}_{x,\phi}^G \otimes \mathcal{H}_{x,\phi}^H) \llbracket Z \rrbracket,$$

et le produit tensoriel

$$\Delta_S^{G,H}(Z) = \bigotimes_{x \in S} \Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z),$$

complété par l'élément unité de $\mathcal{H}_{x,K_x}^G \otimes \mathcal{H}_{x,K'_x}^H$ en toute place $x \notin S$, peut être vu comme un élément central de

$$(\mathcal{H}_K^G \otimes \mathcal{H}_{K'}^H) \llbracket Z \rrbracket.$$

De même, lorsque $H = G$,

$$\Delta_S^{G,G}(Z) = \bigotimes_{x \in S} \Delta_x^{G,G}(\bullet, \bullet, Z)$$

peut être vu comme un élément central de

$$(\mathcal{H}_K^G \otimes \mathcal{H}_K^G) \llbracket Z \rrbracket.$$

Maintenant, les formes bilinéaires

$$(h, h') \mapsto (\mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^G \times \mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^H)(h, h') = \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(G(\mathbb{A})/A_G) \\ \pi' \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(H(\mathbb{A})/A_H)}} \mathrm{Tr}_\pi(h) \mathrm{Tr}_{\pi'}(h')$$

et

$$(h, h') \mapsto (\mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}^G \times \mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}^H)(h, h') = \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{A})/A_G) \\ \pi_1 \in \Pi_{\mathrm{disc}}(H(\mathbb{A})/A_H)}} \mathrm{Tr}_\pi(h) \mathrm{Tr}_{\pi_1}(h')$$

définissent des formes linéaires sur $\mathcal{H}_K^G \otimes \mathcal{H}_{K'}^H$, si bien que les expressions

$$(\mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^G \times \mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^H)((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z))$$

et

$$(\mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}^G \times \mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}^H)((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z))$$

définissent des séries formelles, éléments de

$$\mathbb{C}[[Z]].$$

On a comme conséquence immédiate des Lemmes I.11 et I.12 :

Corollaire I.13. – *Les séries formelles*

$$(\mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^G \times \mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^H)((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z))$$

ou

$$(\mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}^G \times \mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}^H)((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z))$$

sont des fractions rationnelles, bien définies en $Z = 1$. Elles y valent

$$(\mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^G *_{\rho} \mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^H)(h, h') = \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(G) \\ \pi' \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(H) \\ \pi' = \rho_*(\pi)}} \mathrm{Tr}_\pi(h) \cdot \mathrm{Tr}_{\pi'}(h')$$

ou

$$(\mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}^G *_{\rho} \mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}^H)(h, h') = \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G) \\ \pi' \in \Pi_{\mathrm{disc}}(H) \\ \pi' = \rho_*(\pi)}} \mathrm{Tr}_\pi(h) \cdot \mathrm{Tr}_{\pi'}(h').$$

□

En particulier, quand $G = H$, les séries formelles

$$(\mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^G \times \mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^G)((h \otimes h_1) * \Delta_S^{G,G}(Z))$$

ou

$$(\mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}^G \times \mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}^G)((h \otimes h_1) * \Delta_S^{G,G}(Z))$$

sont des fractions rationnelles bien définies en $Z = 1$, où elles valent

$$(\mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^G *_{\rho} \mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^G)(h, h_1) = \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(G)} \mathrm{Tr}_\pi(h) \cdot \mathrm{Tr}_\pi(h_1)$$

ou

$$(\mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}^G *_{\rho} \mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}^G)(h, h_1) = \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G)} \mathrm{Tr}_\pi(h) \cdot \mathrm{Tr}_\pi(h_1).$$

Bien sûr, on ne peut espérer d'égalité par exemple entre $(\mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^G *_{\rho} \mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^H)(h, h')$ et $(\mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^G *_{\rho} \mathrm{Tr}_{\mathrm{cusp}}^G)(h, \rho^* h')$ car certains $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(G)$ ne se transfèrent pas dans $\Pi_{\mathrm{cusp}}(H)$.

Exposé II :

Travail sur les noyaux

À partir de cet exposé, nous abandonnons la formule des traces d'Arthur-Selberg et travaillons directement sur les noyaux des opérateurs de Hecke. Nous montrons ici comment faire disparaître les séries d'Eisenstein formées à partir de représentations cuspidales, puis le spectre discret non cuspidal et les séries d'Eisenstein formées à partir de représentations discrètes non cuspidales.

1 Expression locale concrète du transfert

Gardons notre homomorphisme non ramifié presque partout

$$\begin{array}{ccc}
 {}^L G & \xrightarrow{\rho} & {}^L H \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & W_F
 \end{array}$$

ainsi que les sous-groupes ouverts $K = \prod_{x \in |X|} K_x$ de K_0^G et $K' = \prod_{x \in |X|} K'_x$ de K_0^H , et que la partie finie $S_0 \subset |X|$ en dehors de laquelle G, H, ρ, K et K' sont non ramifiés.

Les actions de W_F sur \hat{G} et \hat{H} se factorisent à travers des quotients finis de W_F ou, ce qui revient au même, elles se prolongent par continuité en des actions de la complétion profinie \hat{W}_F qui n'est autre que le groupe de Galois de F .

Dans la suite de ce texte, on supposera toujours que l'homomorphisme

$$\rho : \hat{G} \rtimes W_F \rightarrow \hat{H} \rtimes W_F$$

se prolonge par continuité en un homomorphisme :

$$\hat{\rho} : \hat{G} \rtimes \hat{W}_F \rightarrow \hat{H} \rtimes \hat{W}_F$$

Autrement dit, il existe un quotient fini W de W_F au-dessus duquel ρ se factorise en un homomorphisme :

$$\hat{G} \rtimes W \rightarrow \hat{H} \rtimes W$$

Nous avons d'abord besoin de préciser la forme des homomorphismes induits par ρ entre les algèbres de Hecke sphériques locales.

On rappelle que nos deux groupes linéaires G et H sont de la forme

$$G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i},$$

$$H = \prod_{i' \in I_H} \text{Res}_{E_{i'}/F} \text{GL}_{r_{i'}}.$$

Lemme II.1. – En une place $x \in |X| - S_0$, considérons les décompositions en produits de corps locaux

$$E_{i,x} = \prod_{j \in I_{i,x}} F_{x,i,j},$$

$$E_{i',x} = \prod_{j' \in I_{i',x}} F_{x,i',j'},$$

et les isomorphismes de Satake induits

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\phi}^G \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} \mathbb{C}[X_{i,j,1}^{\pm 1}; \dots; X_{i,j,r_i}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_i}},$$

$$S_x^H : \mathcal{H}_{x,\phi}^H \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{i' \in I_H \\ j' \in I_{i',x}}} \mathbb{C}[X_{i',j',1}^{\pm 1}; \dots; X_{i',j',r_{i'}}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_{i'}}}.$$

(i) Alors l'homomorphisme d'algèbres induit par ρ

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\phi}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x,\phi}^G$$

peut s'écrire en substituant à chaque variable $X_{i',j',k'}$ un monôme de la forme

$$\varepsilon_{i',j',k'} \cdot \prod_{\substack{i \in I_G, j \in I_{i,x} \\ 1 \leq k \leq r_i}} X_{i,j,k}^{\frac{m_{i',j',k'}(i,j,k)}{d_x}}$$

où

- d_x est le plus petit entier (nécessairement multiple des degrés sur F_x des $F_{x,i,j}$ et des $F_{x,i',j'}$) tel que l'homomorphisme local réduit

$$\rho_x : \hat{G} \rtimes W_{\kappa(x)} \rightarrow \hat{H} \rtimes W_{\kappa(x)}$$

au-dessus de $W_{\kappa(x)} = \mathbb{Z}$ se factorise en un homomorphisme

$$\hat{G} \rtimes \mathbb{Z}/d_x \cdot \mathbb{Z} \rightarrow \hat{H} \rtimes \mathbb{Z}/d_x \cdot \mathbb{Z}$$

au-dessus du quotient fini $\mathbb{Z}/d_x \cdot \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z} = W_{\kappa(x)}$;

- les $m_{i',j',k'}(i,j,k)$ sont dans \mathbb{Z} , et $(\varepsilon_{i',j',k'})^{d_x} = 1$.

(ii) Il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les multiplicités $m_{i',j',k'}(i,j,k)$ et les racines de l'unité $\varepsilon_{i',j',k'}$ quand on fait varier $x \in |X| - S_0$.

(iii) Quitte à renuméroter les indices $j \in I_{i,x}$, $k \in \{1, \dots, r_i\}$ et $j' \in I_{i',x}$, $k' \in \{1, \dots, r_{i'}\}$, en toutes les places x , on peut même supposer qu'elles ne dépendent que de l'image de Frob_x dans n'importe quel quotient fini du groupe W_F au-dessus duquel se factorise l'homomorphisme $\rho : \hat{G} \rtimes W_F \rightarrow \hat{H} \rtimes W_F$.

Démonstration. Considérons la restriction au-dessus de l'élément unité de W_F de l'homomorphisme ρ . Elle s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} \hat{G} & \longrightarrow & \hat{H} \\ \parallel & & \parallel \\ \prod_{\substack{i \in I_G \\ \iota : E_i \hookrightarrow \bar{F}}} \text{GL}_{r_i}(\mathbb{C}) & & \prod_{\substack{i' \in I_H \\ \iota' : E_{i'} \hookrightarrow \bar{F}}} \text{GL}_{r_{i'}}(\mathbb{C}) \end{array}$$

Elle induit une application entre ensembles de classes de conjugaison semi-simples qui se relève en un homomorphisme entre tores complexes maximaux

$$\prod_{\substack{i \in I_G \\ \iota: E_i \hookrightarrow \bar{F}}} (\mathbb{C}^\times)^{r_i} \longrightarrow \prod_{\substack{i' \in I_H \\ \iota': E_{i'} \hookrightarrow \bar{F}}} (\mathbb{C}^\times)^{r_{i'}}$$

qui est nécessairement défini en substituant aux variables d'arrivées des monômes à multiplicités entières en les variables de départ.

Plaçons-nous maintenant en une place $x \in |X| - S_0$.

Si g est un élément de la fibre \hat{G}_x de ${}^L G$ au-dessus de $\text{Frob}_x = \tau$ et g' son image dans \hat{H}_x , alors

$$g \cdot (\tau^{-1} g \tau) \cdot (\tau^{-2} g \tau^2) \dots (\tau^{-d_x+1} g \tau^{d_x-1}) = g_0$$

est un élément de \hat{G} , et

$$g' \cdot (\tau^{-1} g' \tau) \cdot (\tau^{-2} g' \tau^2) \dots (\tau^{-d_x+1} g' \tau^{d_x-1}) = g'_0$$

est son image dans \hat{H} .

De plus, si les $X_{i,j,k}$, $i \in I_G$, $j \in I_{i,x}$, $1 \leq k \leq r_i$, sont les invariants de g , les valeurs propres de g_0 sont les

$$X_{i,j,k}^{\frac{d_x}{[F_{x,i,j}:F_x]}}.$$

De même, si les $X'_{i',j',k'}$, $i' \in I_H$, $j' \in I_{i',x}$, $1 \leq k' \leq r'_{i'}$, sont les invariants de g' , les valeurs propres de g'_0 sont les

$$X'^{\prime}_{i',j',k'}^{\frac{d_x}{[F_{x,i',j'}:F_x]}}.$$

On en déduit facilement (i) et (ii).

(iii) résulte de ce que les homomorphismes déduits de ρ via les isomorphismes de Satake

$$\bigotimes_{\substack{i' \in I_H \\ j' \in I_{i',x}}} \mathbb{C} [X'^{\pm 1}_{i',j',1}; \dots; X'^{\pm 1}_{i',j',r_{i'}}] \stackrel{\rho_x}{\rightarrow} \bigotimes_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} \mathbb{C} [X_{i,j,1}; \dots; X_{i,j,r_i}]$$

ne dépendent que de l'action de Frob_x sur les ensembles finis $\{\iota: E_i \hookrightarrow \bar{F}\}$ et $\{\iota': E_{i'} \hookrightarrow \bar{F}\}$. \square

Nous pouvons maintenant renforcer le Lemme I.11 en :

Lemme II.2. – *On peut trouver une partie finie $S \subset |X| - S_0$ telle que pour toute paire de représentations des spectres automorphes*

$$\pi \in \Pi_{\text{aut},K}(G(\mathbb{A})/A_G)$$

$$\pi' \in \Pi_{\text{aut},K'}(H(\mathbb{A})/A_H)$$

vérifiant

$$\pi'_x = (\rho_x)_* (\pi_x), \quad \forall x \in S,$$

on ait nécessairement

$$\pi'_x = (\rho_x)_* (\pi_x), \quad \forall x \in |X| - S_0,$$

et donc

$$\pi' = \rho_* (\pi).$$

Démonstration. D'après le théorème de décomposition spectrale de Langlands, il existe un ensemble fini $\{\pi^0\}$ de représentations $\pi^0 \in \Pi_{\text{aut},K}(G(\mathbb{A})/A_G)$ tel que, pour toute représentation $\pi \in \Pi_{\text{aut},K}(G(\mathbb{A})/A_G)$, on peut trouver

- une représentation $\pi^0 \in \{\pi^0\}$,
 - une partition $\{1, \dots, r_i\} = \coprod I_{i,\ell}$ de chaque ensemble $\{1, \dots, r_i\}$, $i \in I_G$,
 - des nombres complexes $\lambda_{i,\ell}$ de module 1, indexés par les $i \in I_G$ et les ℓ ci-dessus,
- vérifiant la propriété suivante :

Pour toute place $x \in |X| - S_0$, et si on a les décompositions

$$E_{i,x} = \prod_{j \in I_{i,x}} F_{x,i,j},$$

les valeurs propres de Hecke de π et de π^0 sont reliées par la formule

$$z_{i,j,k}(\pi) = z_{i,j,k}(\pi^0) \cdot \lambda_{i,\ell}^{\deg(x) \cdot [F_{x,i,j}:F_x]}$$

pour $i \in I_G$, $j \in I_{i,x}$ et $k \in I_{i,\ell} \subseteq \{1, \dots, r_i\}$.

On dira alors que π est dans la classe de π^0 .

De même, on peut trouver dans $\Pi_{\text{aut},K'}(H(\mathbb{A})/A_H)$ un sous-ensemble fini $\{\pi'^0\}$ tel que toute représentation $\pi' \in \Pi_{\text{aut},K'}(H(\mathbb{A})/A_H)$ soit dans la classe d'au moins une $\pi'^0 \in \{\pi'^0\}$.

Si maintenant π^0 et π'^0 sont des éléments des deux ensembles finis $\{\pi^0\}$ et $\{\pi'^0\}$ et si on fait décrire à π et π' les classes de π^0 et π'^0 , le lemme II.1 implique que la famille infinie d'équations

$$\pi'_x = (\rho_x)_*(\pi_x), \quad \forall x \in |X| - S_0,$$

se ramène à un sous-ensemble fini d'entre elles : cela résulte simplement de ce que la variété des $\lambda_{i,\ell}$ est noethérienne, de même que la variété analogue paramétrisant la classe de π'^0 , et de ce que les équations considérées sont algébriques.

D'où le résultat voulu. □

2 Disparition des séries d'Eisenstein de type cuspidal

Nous allons maintenant reprendre le procédé de diagonalisation introduit dans l'exposé précédent, mais en l'appliquant aux noyaux plutôt qu'aux traces d'une paire d'opérateurs de Hecke.

Considérons donc deux fonctions de Hecke $h \in \mathcal{H}_K^G/A_G$ et $h' \in \mathcal{H}_{K'}^H/A_H$.

Le noyau de l'action de h sur $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G)$ s'écrit

$$K_h(g_1, g_2) = \sum_{\gamma \in G(F)} h(g_2^{-1} \gamma g_1)$$

et il se décompose en une somme finie

$$\sum_{(P,\pi)} K_h^{(P,\pi)}(g_1, g_2)$$

où (P, π) décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires discrètes telles que le sous-espace π^K des vecteurs invariants par K soit non nul.

On a une décomposition analogue pour le noyau

$$K_{h'}(g'_1, g'_2) = \sum_{\gamma' \in H(F)} h'(g'^{-1} \gamma' g'_1)$$

de l'action de h' sur $L^2(H(F)\backslash H(\mathbb{A})/A_H)$.

L'homomorphisme de transfert

$${}^L G \xrightarrow{\rho} {}^L H$$

induit un homomorphisme entre les composantes neutres

$$\prod_{\substack{i \in I_G \\ \iota: E_i \hookrightarrow \bar{F}}} \mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{C}) = \hat{G} \rightarrow \hat{H},$$

et d'autre part, on dispose de la composante neutre de l'abélianisé de ${}^L G$

$$({}^L G)_0^{\mathrm{ab}} = \prod_{i \in I_G} \mathbb{C}^\times.$$

On dira que ρ est essentiellement injectif lorsque le noyau de

$$\hat{G} \rightarrow \hat{H} \times ({}^L G)_0^{\mathrm{ab}}$$

est fini.

Cela implique en particulier l'inégalité des rangs semi-simples de H et G :

$$|B_H| - |I_H| \geq |B_G| - |I_G|$$

Rappelons alors les séries formelles de diagonalisation introduites dans le Lemme I.12 et demandons-leur une propriété supplémentaire :

Lemme II.3. – *Supposons que l'homomorphisme de transfert ${}^L G \xrightarrow{\rho} {}^L H$ est essentiellement injectif. Alors, pour tout $x \in S$, on peut trouver une fraction rationnelle $\Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z)$ en la variable Z et à coefficients dans le produit tensoriel*

$$\left(\bigotimes_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} \mathbb{C}[X_{i,j,1}^{\pm 1}; \dots; X_{i,j,r_i}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_i}} \right) \otimes \left(\bigotimes_{\substack{i' \in I_H \\ j' \in I_{i',x}}} \mathbb{C}[X_{i',j',1}^{\pm 1}; \dots; X_{i',j',r_{i'}}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_{i'}}} \right)$$

telle que :

- son dénominateur soit un produit de termes de la forme

$$1 - Z \cdot \left(\frac{\varepsilon_{i',j',k'} \cdot \prod_{\substack{i \in I_G, j \in I_{i,x} \\ 1 \leq k \leq r_i}} X_{i,j,k}^{\frac{m_{i',j',k'}(i,j,k)}{d_x}}}{X'_{i',j',k'}} \right)^{\pm 1}$$

avec les notations du Lemme II.1,

- pour toute spécialisation des valeurs propres de Hecke

$$z \in \prod_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} (\mathbb{C}^\times)^{(r_i)}, \quad z' \in \prod_{\substack{i' \in I_H \\ j' \in I_{i',x}}} (\mathbb{C}^\times)^{(r_{i'})},$$

la fraction rationnelle

$$\Delta_x^{G,H}(z, z', Z)$$

soit bien définie au point $Z = 1$ et vérifie

$$\lim_{Z \rightarrow 1} \Delta_x^{G,H}(z, z', Z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z' = (\rho_x)_*(z), \\ 0 & \text{si } z' \neq (\rho_x)_*(z), \end{cases}$$

- pour tout $z \in \prod_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} (\mathbb{C}^\times)^{(r_i)}$ fixé, et tout entier m , $0 \leq m \leq |B_H|$, l'ensemble des $z' \in \prod_{\substack{i' \in I_H \\ j' \in I_{i',x}}} (\mathbb{C}^\times)^{(r_{i'})}$ tels que la fraction rationnelle $\Delta_x^{G,H}(z, z', Z)$ s'annule en $Z = 1$ à un ordre $\leq m$ est une partie semi-algébrique de dimension $\leq m$,
- pour tout $z' \in \prod_{\substack{i' \in I_H \\ j' \in I_{i',x}}} (\mathbb{C}^\times)^{(r_{i'})}$, tout $z_0 \in \prod_{i \in I_G} \mathbb{C}^\times = ({}^L G)_0^{\text{ab}}$, et tout entier m , $0 \leq m \leq |B_G| - |I_G|$, l'ensemble des $z \in \prod_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} (\mathbb{C}^\times)^{(r_i)}$ tels que $\det(z) = z_0$ et que la fraction rationnelle $\Delta_x^{G,H}(z, z', Z)$ s'annule en $Z = 1$ à un ordre $\leq m$ est une partie semi-algébrique de dimension $\leq m$.

Remarque. Ici encore, toute solution à ce problème en engendre beaucoup d'autres, puisque toutes ses puissances en sont.

Démonstration du lemme. Comme l'homomorphisme de transfert $\rho : {}^L G \rightarrow {}^L H$ est essentiellement injectif par hypothèse, le morphisme

$$\prod_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} (\mathbb{C}^\times)^{(r_i)} \rightarrow \left(\prod_{i \in I_G} \mathbb{C}^\times \right) \times \left(\prod_{\substack{i' \in I_H \\ j' \in I_{i',x}}} (\mathbb{C}^\times)^{(r_{i'})} \right)$$

est fini. D'après cette remarque et le Lemme II.1, il suffit de traiter le cas où $G = H$.

On peut traiter séparément les facteurs de G et supposer donc que $G = \text{GL}_r$. Dans ce cas, considérons comme dans la démonstration du Lemme I.12 la fraction rationnelle

$$\Delta_x^{G,G}(X_{\bullet}^{\pm 1}, X'_{\bullet}{}^{\pm 1}, Z) = \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq r} \left(1 - Z \cdot \frac{X_i}{X_j} \right) \cdot \prod_{1 \leq i, j \leq r} \left(1 - Z \cdot \frac{X'_i}{X'_j} \right)}{\prod_{1 \leq i, j \leq r} \left(1 - Z \cdot \frac{X_i}{X'_j} \right) \cdot \left(1 - Z \cdot \frac{X'_i}{X_j} \right)}.$$

Si $z = (z_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $z' = (z'_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont deux éléments de $(\mathbb{C}^\times)^{(r)}$, l'ordre d'annulation de $\Delta_x^{G,G}(z, z', Z)$ au point $Z = 1$ est égal à

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{C}^\times} (\#\{1 \leq i \leq r \mid z_i = \alpha\} - \#\{1 \leq i \leq r \mid z'_i = \alpha\})^2.$$

On en déduit facilement que cette fraction rationnelle vérifie toutes les propriétés demandées dans l'énoncé du lemme. \square

Le produit tensoriel

$$\Delta_S^{G,H}(Z) = \bigotimes_{x \in S} \Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z),$$

complété par l'élément unité de $\mathcal{H}_{x, K_x}^G \otimes \mathcal{H}_{x, K'_x}^H$ en toute place $x \notin S$, peut être vu comme un élément central de

$$(\mathcal{H}_K^G \otimes \mathcal{H}_{K'}^H) \llbracket Z \rrbracket.$$

De même, lorsque $H = G$,

$$\Delta_S^{G,G}(Z) = \bigotimes_{x \in S} \Delta_x^{G,G}(\bullet, \bullet, Z)$$

peut être vu comme un élément central de

$$(\mathcal{H}_K^G \otimes \mathcal{H}_K^G) \llbracket Z \rrbracket.$$

Pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g'_1, g'_2 \in H(\mathbb{A})$, la forme bilinéaire

$$(h, h') \mapsto K_h^G(g_1, g_2) \cdot K_{h'}^H(g'_1, g'_2)$$

définit une forme linéaire sur $\mathcal{H}_K^G \otimes \mathcal{H}_{K'}^H$, si bien que l'expression

$$(K_\bullet^G(g_1, g_2) \times K_\bullet^H(g'_1, g'_2))((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z))$$

définit une série formelle, élément de

$$\mathbb{C} \llbracket Z \rrbracket.$$

Nous allons prouver :

Théorème II.4. – *Supposons que l'homomorphisme de transfert*

$$\begin{array}{ccc} LG & \xrightarrow{\rho} & LH \\ & \searrow & \swarrow \\ & W_F & \end{array}$$

est essentiellement injectif.

Alors, pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g'_1, g'_2 \in H(\mathbb{A})$, et toutes fonctions de Hecke $h \in \mathcal{H}_K^G/A_G$, $h' \in \mathcal{H}_{K'}^H/A_H$, on a :

(i) La série formelle

$$(K_\bullet^G(g_1, g_2) \times K_\bullet^H(g'_1, g'_2))((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z))$$

est une fraction rationnelle.

En faisant décrire à (P, π) et (P', π') un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires discrètes qui admettent des vecteurs non nuls invariants par K et K' , elle est la somme finie des séries formelles

$$(K_\bullet^{(P, \pi)}(g_1, g_2) \times K_\bullet^{(P', \pi')}(g'_1, g'_2))((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z))$$

qui sont toutes des fractions rationnelles en Z .

(ii) Si $\pi \in \Pi_{\text{disc}}(G/A_G)$ et $\pi' \in \Pi_{\text{disc}}(H/A_H)$ sont deux représentations des spectres automorphes discrets, la série formelle

$$(K_\bullet^{G, \pi}(g_1, g_2) \times K_\bullet^{H, \pi'}(g'_1, g'_2))((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z))$$

est une fraction rationnelle en Z . Elle est bien définie en $Z = 1$ et y vaut

$$\begin{cases} K_h^{G, \pi}(g_1, g_2) \cdot K_{h'}^{H, \pi'}(g'_1, g'_2) & \text{si } \pi' = \rho_* \pi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iii) Pour toutes paires discrètes (P, π) et (P', π') telles que toutes les composantes de π et π' soient cuspidales, la série formelle

$$(K_\bullet^{(P, \pi)}(g_1, g_2) \times K_\bullet^{(P', \pi')}(g'_1, g'_2))((h \otimes h') \otimes \Delta_S^{G,H}(Z))$$

est une fraction rationnelle. Elle est bien définie en $Z = 1$, et son ordre d'annulation y est au moins égal à

$$\max\{|P| - |I_G|, |P'| - |I_{G'}|\}.$$

Démonstration. On a, d'après le Corollaire I.2,

$$K_h^G(g_1, g_2) = \sum_{(P, \pi)} K_h^{(P, \pi)}(g_1, g_2)$$

où pour toute paire discrète (P, π) dans notre ensemble fini de représentants de leurs classes, le noyau $K_h^{(P, \pi)}(g_1, g_2)$ s'écrit

$$K_h^{(P, \pi)}(g_1, g_2) = \frac{1}{|\text{Fixe}(\pi)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot E_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P)(g_1) \cdot \overline{E_P^G(\varphi, \lambda_P)(g_2)}.$$

Et de même, on a

$$K_{h'}^H(g'_1, g'_2) = \sum_{(P', \pi')} K_{h'}^{(P', \pi')}(g'_1, g'_2)$$

avec, pour toute paire discrète (P', π') dans notre ensemble de représentants,

$$K_{h'}^{(P', \pi')}(g'_1, g'_2) = \frac{1}{|\text{Fixe}(\pi')|} \cdot \sum_{\varphi' \in \mathcal{B}_{K'}(P', \pi')} \int_{\text{Im } \Lambda_{P'}} d\lambda_{P'} \cdot E_{P'}^H(h'(\varphi', \lambda_{P'}), \lambda_{P'})(g'_1) \cdot \overline{E_{P'}^H(\varphi', \lambda_{P'})(g'_2)}.$$

Par conséquent, la série formelle

$$(K_\bullet^G(g_1, g_2) \times K_\bullet^H(g'_1, g'_2))((h \otimes h') * \Delta_S^{G, H}(Z))$$

s'écrit comme une somme sur les (P, π) et les (P', π') des séries formelles

$$\begin{aligned} & (K_\bullet^{(P, \pi)}(g_1, g_2) \times K_\bullet^{(P', \pi')}(g'_1, g'_2))((h \otimes h') * \Delta_S^{G, H}(Z)) \\ &= \frac{1}{|\text{Fixe}(\pi)|} \cdot \frac{1}{|\text{Fixe}(\pi')|} \cdot \sum_{\substack{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi) \\ \varphi' \in \mathcal{B}_{K'}(P', \pi')}} \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_{P'}} d\lambda_{P'} \cdot \Delta_S^{\pi, \pi'}(\lambda_P, \lambda_{P'}, Z) \\ & E_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P)(g_1) \cdot \overline{E_P^G(\varphi, \lambda_P)(g_2)} \cdot E_{P'}^H(h'(\varphi', \lambda_{P'}), \lambda_{P'})(g'_1) \cdot \overline{E_{P'}^H(\varphi', \lambda_{P'})(g'_2)}, \end{aligned}$$

où

$$\Delta_S^{\pi, \pi'}(\lambda_P, \lambda_{P'}, Z) = \prod_{x \in S} \Delta_x^{\pi, \pi'}(\lambda_P, \lambda_{P'}, Z)$$

et chaque $\Delta_x^{\pi, \pi'}(\lambda_P, \lambda_{P'}, Z)$ se déduit de $\Delta_x^{G, H}(\bullet, \bullet, Z)$ en substituant aux variables $X_{i, j, k}$, $i \in I_G$, $j \in I_{i, x}$, $1 \leq k \leq r_i$, et aux variables $X'_{i', j', k'}$, $i' \in I_H$, $j' \in I_{i', x}$, $1 \leq k' \leq r_{i'}$, les valeurs propres de Hecke des représentations non ramifiées $(\pi \otimes \lambda_P)_x$ et $(\pi' \otimes \lambda_{P'})_x$.

Pour (g_1, g_2) et (g'_1, g'_2) fixés, les produits

$$E_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P)(g_1) \cdot \overline{E_P^G(\varphi, \bar{\lambda}_P^{-1})(g_2)} = R(\lambda_P),$$

$$E_{P'}^H(h'(\varphi', \lambda_{P'}), \lambda_{P'})(g'_1) \cdot \overline{E_{P'}^H(\varphi', \bar{\lambda}_{P'}^{-1})(g'_2)} = R'(\lambda_{P'})$$

sont des fractions rationnelles en λ_P et $\lambda_{P'}$ qui n'ont pas de dénominateur sur $\text{Im } \Lambda_P$ et $\text{Im } \Lambda_{P'}$.

Alors l'intégrale (qui converge pour $Z \in \mathbb{C}$ dès que $|Z|$ est assez petit, en fonction des valeurs propres de Hecke de π et π' en les places $x \in S$, pour que $\Delta_S^{\pi, \pi'}(\lambda_P, \lambda_{P'}, Z)$ définisse une série entière absolument convergente)

$$\int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_{P'}} d\lambda_{P'} \cdot \Delta_S^{\pi, \pi'}(\lambda_P, \lambda_{P'}, Z) \cdot R(\lambda_P) \cdot R'(\lambda_{P'})$$

définit une fraction rationnelle en Z , comme on voit en déplaçant les contours d'intégration $\text{Im } \Lambda_P$ et $\text{Im } \Lambda_{P'}$ jusqu'à l'infini dans une certaine direction. Cela prouve (i).

Vérifions maintenant que, si toutes les composantes de π et π' sont cuspidales, cette fraction rationnelle est bien définie en $Z = 1$, et que son ordre d'annulation y est au moins égal à

$$\max\{|P| - |I_G|, |P'| - |I_H|\}.$$

Le dénominateur de la fraction rationnelle $\Delta_S^{\pi, \pi'}(\lambda_P, \lambda_{P'}, Z)$ est un produit de facteurs de la forme

$$1 - Z \cdot \left(\frac{\varepsilon_{i', j', k'} \cdot \prod_{\substack{i \in I_G, j \in I_{i, x} \\ 1 \leq k \leq r_i}} z_{i, j, k}(\pi \otimes \lambda_P)_x^{\frac{m_{i', j', k'}(i, j, k)}{d_x}}}{z_{i', j', k'}(\pi' \otimes \lambda_{P'})_x} \right)^{\pm 1}.$$

En procédant au changement de variable $\lambda_P \mapsto \lambda_P^{\left(\prod_{x \in S} d_x\right)}$, on obtient qu'ils sont tous de la forme

$$1 - Z \cdot \alpha \cdot \chi(\lambda_P) \cdot \chi'(\lambda_{P'})$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ est le produit d'une racine de l'unité et de puissances fractionnaires des valeurs propres de Hecke de π et π' en une place $x \in S$ et où χ, χ' sont deux caractères algébriques de Λ_P et $\Lambda_{P'}$.

Notre fonction rationnelle en Z est égale à

$$\int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_{P'}} d\lambda_{P'} \cdot \Delta_S^{\pi, \pi'}(\lambda_P, \lambda_{P'}, Z) \cdot R(\lambda_P) \cdot R'(\lambda_{P'})$$

dès que $|Z|$ est assez petit.

Dans un premier temps, déplaçons Z vers 1 pour obtenir une formule valable dans un ouvert U de \mathbb{C}^\times qui contient 1 dans son adhérence. Ceci fait apparaître des résidus calculés le long d'hyperplans définis par des équations de la forme

$$1 - Z \cdot \alpha \cdot \chi(\lambda_P) \cdot \chi'(\lambda_{P'}) = 0$$

avec $|\alpha| > 1$ (ou même aucun résidu si on s'autorise à utiliser la conjecture de Ramanujan-Petersson puisque celle-ci implique que toutes les constantes α qui apparaissent dans les facteurs $1 - Z \cdot \alpha \cdot \chi(\lambda_P) \cdot \chi'(\lambda_{P'})$ du dénominateur sont de module 1).

Puis, dans un deuxième temps, déplaçons les contours d'intégration subsistants dans $\text{Im } \Lambda_P$ et $\text{Im } \Lambda_{P'}$ pour obtenir une formule valable dans un ouvert V de \mathbb{C}^\times qui contient 1. Cela fait apparaître des résidus calculés le long d'hyperplans définis par des équations de la forme

$$1 - Z \cdot \alpha \cdot \chi(\lambda_P) \cdot \chi'(\lambda_{P'}) = 0$$

avec $|\alpha| = 1$.

En définitive, notre fraction rationnelle en Z s'écrit au voisinage de 1 comme une somme de termes de la forme

$$\int_{\substack{\lambda = (\lambda_P, \lambda_{P'}) \in \Lambda_Z \\ \text{Re}(\lambda) = \text{Re}(\lambda_0)}} d\lambda \cdot \Delta(\lambda, Z) \cdot R(\lambda_P) \cdot R'(\lambda_{P'})$$

où :

- $\Lambda_Z \subset \Lambda_P \times \Lambda_{P'}$ est défini par d équations de la forme

$$1 - Z \cdot \alpha \cdot \chi(\lambda_P) \cdot \chi'(\lambda_{P'}) = 0 \quad \text{avec } |\alpha| \geq 1,$$

(si bien que Λ_Z est de codimension d dans $\Lambda_P \times \Lambda_{P'}$)

- $\Delta(\lambda, Z)$ est déduit de $\Delta_S^{\pi, \pi'}(\lambda_P, \lambda_{P'}, Z)$ par calcul des résidus successifs le long de ces hypersurfaces,
- λ_0 est un point de Λ_Z qui est “générique” au sens qu’on peut le choisir en dehors de tout fermé fixé à l’avance.

Comme Λ_Z est de dimension $(|P| - |I_G|) + (|P'| - |I_H|) - d$ et que λ_0 est “générique”, les fractions rationnelles $\Delta_S^{\pi, \pi'}(\lambda_P, \lambda_{P'}, Z)$ ont, pour tout $\lambda = (\lambda_P, \lambda_{P'}) \in \Lambda$ tel que $\text{Re } \lambda = \lambda_0$, un ordre d’annulation en $Z = 1$ au moins égal à

$$\max\{(|P| - |I_G|) - d, (|P'| - |I_H|) - d, 0\}.$$

De plus, en passant de $\Delta_S^{\pi, \pi'}(\lambda_P, \lambda_{P'}, Z)$ à $\Delta(\lambda, Z)$, on a éliminé du dénominateur un nombre de facteurs s’annulant sur Δ_Z au moins égal à d .

Les pôles de $R(\lambda_P) = E_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P)(g_1) \cdot \overline{E_P^G(\varphi, \bar{\lambda}_P^{-1})(g_2)}$ et $R'(\lambda_{P'}) = E_{P'}^H(h'(\varphi', \lambda_{P'}), \lambda_{P'})(g'_1) \cdot \overline{E_{P'}^H(\varphi', \bar{\lambda}_{P'}^{-1})(g'_2)}$ n’interviennent pas car toutes les composantes de π et π' sont cuspidales.

Donc ces résidus sont bien définis en $Z = 1$ et s’y annulent à un ordre au moins égal à $\max\{|P| - |I_G|, |P'| - |I_H|\}$. C’est l’énoncé (iii).

(ii) Pour deux telles représentations π et π' des spectres discrets, on a

$$(K_{\bullet}^{G, \pi}(g_1, g_2) \times K_{\bullet}^{H, \pi'}(g'_1, g'_2))((h \otimes h') * \Delta_S^{G, H}(Z)) = K_h^{G, \pi}(g_1, g_2) \cdot K_{h'}^{H, \pi'}(g'_1, g'_2) \cdot \prod_{x \in S} \Delta_x^{G, H}(z(\pi_x), z(\pi'_x), Z).$$

D’où on déduit la conclusion du théorème. \square

Dans la situation du théorème, on peut noter $K_h^{G, \text{cusp}, \text{Eis}}(g_1, g_2)$ le noyau déduit de $K_h^G(g_1, g_2) = \sum_{(P, \pi)} K_h^{(P, \pi)}(g_1, g_2)$ en restreignant la sommation aux paires discrètes (P, π) telles que toutes les composantes de π soient cuspidales. On introduit de même $K_{h'}^{H, \text{cusp}, \text{Eis}}(g'_1, g'_2)$.

On note

$$K_h^{G, \text{cusp}, \text{Eis}}(g_1, g_2) *_{\rho} K_{h'}^{H, \text{cusp}, \text{Eis}}(g'_1, g'_2)$$

la valeur en $Z = 1$ de la fraction rationnelle

$$(K_{\bullet}^{G, \text{cusp}, \text{Eis}}(g_1, g_2) \times K_{\bullet}^{H, \text{cusp}, \text{Eis}}(g'_1, g'_2))((h \otimes h') * \Delta_S^{G, H}(Z)).$$

La fonction

$$((g_1, g_2), ((g'_1, g'_2))) \mapsto K_h^{G, \text{cusp}, \text{Eis}}(g_1, g_2) *_{\rho} K_{h'}^{H, \text{cusp}, \text{Eis}}(g'_1, g'_2),$$

sur

$$[G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G]^2 \times [H(F) \backslash H(\mathbb{A}) / A_H]^2,$$

donne une fonction intégrable quand on la restreint au produit des diagonales

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G \times H(F) \backslash H(\mathbb{A}) / A_H.$$

Et on a

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G} dg \cdot \int_{H(F) \backslash H(\mathbb{A}) / A_H} dg' \cdot K_h^{G, \text{Eis}, \text{cusp}}(g, g) *_{\rho} K_{h'}^{H, \text{Eis}, \text{cusp}}(g', g') = \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G/A_G) \\ \pi' \in \Pi_{\text{cusp}}(H/A_H) \\ \pi' = \rho_*(\pi)}} \text{Tr}_{\pi}(h) \cdot \text{Tr}_{\pi'}(h').$$

En particulier, quand $H = G$, on a

$$\int_{[G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G]^2} dg \cdot dg_1 \cdot K_h^{G, \text{Eis}, \text{cusp}}(g, g) * K_{h_1}^{G, \text{Eis}, \text{cusp}}(g_1, g_1) = \sum_{\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G/A_G)} \text{Tr}_{\pi}(h) \cdot \text{Tr}_{\pi}(h_1).$$

Bien sûr, on ne peut avoir une égalité entre ces deux expressions quand $h_1 = \rho^*(h')$, car certaines représentations du spectre cuspidal de G ne se transfèrent pas dans le spectre cuspidal de H .

En revanche, on peut espérer pouvoir comparer les deux formules dans les cas où il est possible d'identifier celles des représentations $\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G/A_G)$ qui ont un transfert dans $\Pi_{\text{cusp}}(H/A_H)$.

Examinons l'exemple de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2 via une extension quadratique E de F , avec donc

$$G = \text{Res}_{E/F} \text{GL}_1, \quad H = \text{GL}_2.$$

Ici, $\Pi_{\text{cusp}}(G/A_G)$ est l'ensemble des caractères automorphes $\chi : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / A_G \rightarrow \mathbb{C}$. Un tel caractère admet un transfert dans $\Pi_{\text{cusp}}(H/A_H)$ si et seulement si il ne provient pas d'un caractère de \mathbb{A}_F^\times via l'homomorphisme de norme

$$\text{Nm} : \mathbb{A}_E^\times \rightarrow \mathbb{A}_F^\times.$$

D'après le Théorème II.4, l'existence de l'induction automorphe de G à H équivaut à ce que, pour toutes fonctions $h \in \mathcal{H}^G/A_G$ et $h' \in \mathcal{H}^H/A_H$, on ait l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_{E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / A_G} dg \cdot \int_{\text{GL}_2(F) \backslash \text{GL}_2(\mathbb{A}_F) / A_H} dg' \cdot K_h^G(g, g) *_\rho K_{h'}^H(g', g') \\ &= \left[\text{vol}(E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / A_G) \cdot \sum_{\delta \in E^\times} (h * \rho^* h')(\delta) \right] - \left[\text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times / A_G^2) \cdot \sum_{\gamma \in F^\times} (\text{Nm}_* h * \text{Nm}_* \rho^* h')(\gamma) \right] \end{aligned}$$

où, pour tous $g \in G(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times$ et $g' \in H(\mathbb{A}) = \text{GL}_2(\mathbb{A}_F)$,

$$K_h^G(g, g) *_\rho K_{h'}^H(g', g')$$

est par définition la valeur en $Z = 1$ de la fraction rationnelle

$$\sum_{\substack{\delta \in E^\times \\ \gamma \in \text{GL}_2(F)}} [(h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z)](\delta, g'^{-1} \cdot \gamma \cdot g').$$

3 La formule d'inversion de Shalika

Nous voudrions faire disparaître dans nos formules les représentations des spectres discrets non cuspidaux. Pour cela, nous allons utiliser des opérateurs qui annulent les fonctions qui appartiennent à ces représentations mais préservent les fonctions cuspidales.

Nous considérons toujours les groupes linéaires G de la forme

$$G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}.$$

Pour tout entier $r \geq 1$, on dispose dans GL_r du sous-groupe de Borel standard B_r des matrices triangulaires supérieures et de son radical unipotent N_r .

Par conséquent, on dispose dans G du sous-groupe de Borel standard

$$B_G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} B_{r_i},$$

et de son radical unipotent

$$N_B = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} N_{r_i}.$$

Nous voulons définir un caractère

$$\psi_B : N_B(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

qui soit trivial sur $N_B(F)$ et “régulier” au sens que son stabilisateur dans $M_B(\mathbb{A}) = T_G(\mathbb{A})$ soit égal à $Z_G(\mathbb{A})$.

Pour cela, choisissons une forme différentielle rationnelle ω_X non nulle sur la courbe X et un caractère non trivial

$$\psi : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Pour toute extension finie séparée E de F et tout entier $r \geq 1$, cela permet de définir sur $N_r(\mathbb{A}_E)$ le caractère

$$\psi_r : N_r(\mathbb{A}_E) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

$$n = \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & \cdots & u_{1,r} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{r-1,r} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \psi_r(n)$$

où

$$\psi_r(n) = \psi \left(\text{Res} \left(\text{Tr}_{E/F} \left(\sum_{1 \leq k < r} u_{k,k+1} \right) \cdot \omega_X \right) \right).$$

Ce caractère est régulier, et trivial sur $N_r(E)$ comme il résulte de la formule des résidus.

Alors on définit ψ_B comme le caractère produit

$$\psi_B = \prod_{i \in I_G} \psi_{r_i}.$$

Mettons sur $N_B(\mathbb{A})$ la mesure de Haar dn qui attribue le volume 1 au quotient compact $N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})$.

On introduit l’opérateur linéaire W qui associe à toute fonction localement constante

$$\varphi : G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

la fonction

$$W\varphi : Z_G(F) \cdot N_B(F) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto W\varphi(g) = \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} dn \cdot \psi_B(n) \cdot \varphi(ng).$$

Pour tout entier $r \geq 1$, considérons encore les sous-groupes suivants de GL_r

$$\text{GL}_r^- = \text{GL}_{r-1} \times \{1\} = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$N_r^- = N_{r-1} \times \{1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$Q_{r-1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \right\},$$

puis les sous-groupes correspondants de G

$$\begin{aligned} G^- &= \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}^-, \\ N_B^- &= \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} N_{r_i}^-, \\ Q &= \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} Q_{r_i-1,1}, \end{aligned}$$

avec donc

$$N_B^- = G^- \cap N_B$$

et

$$Q = Z_G \cdot G^- \cdot N_B.$$

On introduit encore l'opérateur linéaire Λ qui associe à toute fonction localement constante

$$\varphi : G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

la fonction

$$\Lambda\varphi : Q(F) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$\Lambda\varphi(g) = \sum_{\gamma \in N_B^-(F) \backslash G^-(F)} W\varphi(\gamma \cdot g).$$

On note que l'opérateur W dépend du choix du caractère régulier ψ_B , mais que l'opérateur Λ n'en dépend pas.

On a le théorème suivant :

Théorème II.5. – (i) *Pour toute fonction invariante à droite par un sous-groupe ouvert de K_0^G*

$$\varphi : G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui est cuspidale, on a

$$\Lambda\varphi = \varphi.$$

(ii) *Pour toute paire discrète (P, π) telle que l'un des facteurs de π au moins ne soit pas cuspidal, et pour toute fonction*

$$\varphi \in L_\infty^2(M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G, \pi),$$

on a pour tout $\lambda_P \in \Lambda_P$

$$WE(\varphi, \lambda_P) = 0$$

et a fortiori

$$\Lambda E(\varphi, \lambda_P) = 0.$$

Indications. (i) est la formule d'inversion de Shalika. C'est le théorème 5.9 de l'article [Shalika, 1974].

(ii) On sait que les fonctions $g \mapsto E_P^G(\varphi, \lambda_P)(g)$ s'obtiennent comme des résidus des séries d'Eisenstein formées à partir de paires discrètes cuspidales (voir les livres de référence [Langlands, 1976] et [Moeglin, Waldspurger, 1993] qui traite le cas des corps de fonctions en même temps que celui des corps de nombres).

Or l'opérateur W appliqué à de telles séries d'Eisenstein d'origine cuspidale n'a pas de pôles le long des hyperplans qui donnent naissance à nos résidus $E_P^G(\varphi, \lambda_P)$: voir le paragraphe 5 de l'article [Shahidi, 1981]

dont les calculs locaux sont fondés sur ceux de [Casselman, Shalika]. Cela signifie exactement que ces résidus $E_P^G(\varphi, \lambda_P)$ sont annulés par l'opérateur W et a fortiori par l'opérateur Λ . \square

Si Φ est une fonction de 2 variables g_1 et g_2 sur $[G(F)\backslash G(\mathbb{A})] \times [G(F)\backslash G(\mathbb{A})]$, on peut noter

$$W_1 W_2 \Phi \quad \text{et} \quad \Lambda_1 \Lambda_2 \Phi$$

le résultat de l'opérateur W ou Λ appliqué indépendamment en chacune des 2 variables de Φ . On déduit aussitôt du Théorème II.5 :

Corollaire II.6. – Soit $h \in \mathcal{H}^G/A_G$ une fonction de Hecke.

(i) Pour toute paire discrète (P, π) telle que $P = G$ et que π soit cuspidale, on a

$$\Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{(P, \pi)} = K_h^{(P, \pi)}.$$

(ii) Pour toute paire discrète (P, π) telle que l'un au moins des facteurs de π ne soit pas cuspidal, on a

$$W_1 W_2 K_h^{(P, \pi)} = 0,$$

et a fortiori

$$\Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{(P, \pi)} = 0.$$

\square

Revenons maintenant à la situation du Théorème II.4. On a donc un homomorphisme de transfert entre groupes linéaires

$$\begin{array}{ccc} {}^L G & \xrightarrow{\quad} & {}^L H \\ & \searrow & \swarrow \\ & W_F & \end{array}$$

un sous-groupe ouvert $K = \prod_{x \in |X|} K_x$ de K_0^G , une partie finie $S_0 \subset |X|$ telle que, pour toute place $x \notin S_0$, G et H soient non ramifiés sur F_x et $K_x = K_{0,x}^G$, et enfin un sous-groupe ouvert $K' = \prod_{x \in |X|} K'_x$ de K_0^H tel que $K'_x = K_{0,x}^H$, $\forall x \notin S_0$ et que K'_x soit assez petit en fonction de K_x et de la ramification de G et H en toutes les places $x \in S_0$.

On se donne alors une partie finie $S \subset |X| - S_0$ qui vérifie la conclusion du Lemme II.2 puis un élément central

$$\Delta_S^{G,H}(Z) = \bigotimes_{x \in S} \Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z)$$

de l'algèbre $(\mathcal{H}_K^G \otimes \mathcal{H}_{K'}^H)[[Z]]$ dont les facteurs $\Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z)$ satisfont les conditions du Lemme II.3.

Le Corollaire II.6 fournit maintenant la variante suivante du Théorème II.4 :

Théorème II.7. – Supposons que l'homomorphisme de transfert

$${}^L G \xrightarrow{\rho} {}^L H$$

est essentiellement injectif.

Alors, pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g'_1, g'_2 \in H(\mathbb{A})$, et toutes fonctions de Hecke $h \in \mathcal{H}_K^G/A_G$, $h' \in \mathcal{H}_{K'}^H/A_H$, on a :

(i) *La série formelle*

$$(\Lambda_1 \Lambda_2 K_{\bullet}^G(g_1, g_2) \times \Lambda_1 \Lambda_2 K_{\bullet}^H(g'_1, g'_2))((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z))$$

est une fraction rationnelle, bien définie en $Z = 1$. Elle y vaut

$$\Lambda_1 \Lambda_2 K_h^G(g_1, g_2) *_{\rho} \Lambda_1 \Lambda_2 K_{h'}^G(g'_1, g'_2) = \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G/A_G) \\ \pi' \in \Pi_{\text{cusp}}(H/A_H) \\ \pi' = \rho_* \pi}} K_h^{G,\pi}(g_1, g_2) \cdot K_{h'}^{H,\pi'}(g'_1, g'_2).$$

(ii) *Pour toutes paires discrètes (P, π) et (P', π') , la série formelle*

$$(\Lambda_1 \Lambda_2 K_{\bullet}^{(P,\pi)}(g_1, g_2) \times \Lambda_1 \Lambda_2 K_{\bullet}^{(P',\pi')}(g'_1, g'_2))((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z))$$

est une fraction rationnelle.

Elle est nulle si l'un au moins des facteurs de π ou π' n'est pas cuspidal.

Sinon, elle est bien définie en $Z = 1$, et son ordre d'annulation y est au moins égal à

$$\max\{|P| - |I_G|, |P'| - |I_H|\}.$$

Démonstration. On considère la série formelle associée dans (ii) à des paires discrètes (P, π) et (P', π') .

Si $P = G$, $P' = G'$ et π, π' sont cuspidales, cette série formelle se confond avec la série formelle correspondante du Théorème 4(ii), comme il résulte du Corollaire II.6(i).

Si l'un des facteurs au moins de π ou π' n'est pas cuspidal, cette série formelle est égale à 0 d'après le Corollaire II.6(ii).

Dans les autres cas, cette série formelle s'écrit, avec les notations de la démonstration du Théorème II.4, sous la forme

$$\frac{1}{|\text{Fixe}(\pi)|} \cdot \frac{1}{|\text{Fixe}(\pi')|} \cdot \sum_{\substack{\varphi \in \mathcal{B}_K^{(P,\pi)} \\ \varphi' \in \mathcal{B}_{K'}^{(P',\pi')}}} \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_{P'}} d\lambda_{P'} \cdot \Delta_S^{\pi, \pi'}(\lambda_P, \lambda_{P'}, Z) \\ \Lambda E_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P)(g_1) \cdot \overline{\Lambda E_P^G(\varphi, \lambda_P)(g_2)} \cdot \Lambda E_{P'}^H(h'(\varphi', \lambda_{P'}), \lambda_{P'})(g'_1) \cdot \overline{\Lambda E_{P'}^H(\varphi', \lambda_{P'})(g'_2)}.$$

Pour $\varphi, \varphi', (g_1, g_2)$ et (g'_1, g'_2) fixés, les produits

$$\Lambda E_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P)(g_1) \cdot \overline{\Lambda E_P^G(\varphi, \bar{\lambda}_P^{-1})(g_2)} = R(\lambda_P),$$

$$\Lambda E_{P'}^H(h'(\varphi', \lambda_{P'}), \lambda_{P'})(g'_1) \cdot \overline{\Lambda E_{P'}^H(\varphi', \bar{\lambda}_{P'}^{-1})(g'_2)} = R'(\lambda_{P'})$$

sont des fractions rationnelles en λ_P et $\lambda_{P'}$ dont les dénominateurs ne rencontrent pas $\text{Im } \Lambda_P$ et $\text{Im } \Lambda_{P'}$, si bien que l'on peut répéter la démonstration du Théorème II.4(iii). \square

4 Comment retrouver les traces cuspidales

Plaçons-nous toujours sur notre groupe algébrique linéaire

$$G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}.$$

On rappelle que si Φ est n'importe quelle fonction sur

$$[G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G]^2$$

qui est invariante à droite en les 2 variables par un sous-groupe ouvert de K_0^G , alors la fonction $\Lambda_1 \Lambda_2 \Phi$ est bien définie sur

$$[Q(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G]^2$$

si bien que la fonction sur $G(\mathbb{A})/A_G$

$$g \mapsto \Lambda_1 \Lambda_2 \Phi(g, g)$$

est invariante à gauche par $Q(F)$ mais pas par $G(F)$ en général.

Nous voudrions définir une fonctionnelle sur une large classe de fonctions

$$Q(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G \rightarrow \mathbb{C},$$

qui, pour toute fonction de Hecke $h \in \mathcal{H}^G$ et toute représentation automorphe cuspidale π de $G(\mathbb{A})/A_G$, permette de retrouver la trace

$$\mathrm{Tr}_\pi(h)$$

à partir du noyau

$$g \mapsto \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{G,\pi}(g, g) = K_h^{G,\pi}(g, g).$$

Pour cela, nous avons d'abord besoin de définir sur $Q(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G$ une fonction de degré relatif à $Q = \prod_{i \in I_G} \mathrm{Res}_{E_i/F} Q_{r_i-1,1}$. C'est la "fonction H de Harish-Chandra et Langlands" que nous noterons ici deg_Q .

Commençons par rappeler la fonction de degré absolu

$$\mathrm{deg} : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{Z}^{I_G}$$

dont la composante d'indice $i \in I_G$ est

$$\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{A}_{E_i}) \xrightarrow{\mathrm{deg} \circ \mathrm{Nm} \circ \det} \mathbb{Z}.$$

Alors on définit la fonction de degré relatif

$$\mathrm{deg}_Q : Q(F)\backslash Q(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{Z}^{I_G}$$

comme le produit sur les indices $i \in I_G$ des fonctions :

$$Q_{r_i-1,1}(E_i)\backslash Q_{r_i-1,1}(\mathbb{A}_{E_i}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\begin{pmatrix} g_{r_i-1,1} & & \vdots & & * \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \lambda_1 \end{pmatrix} \mapsto -\mathrm{deg} \circ \mathrm{Nm} \circ \det(g_{r_i-1}) + (r_i - 1) \cdot \mathrm{deg} \circ \mathrm{Nm}(\lambda_1).$$

En utilisant la décomposition d'Iwasawa, deg_Q s'étend de manière unique en une fonction invariante à droite par K_0^G

$$\mathrm{deg}_Q : Q(F)\backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{Z}^{I_G}.$$

Cette fonction est également invariante par $Z_G(\mathbb{A})$ et a fortiori par A_G .

Posons la définition suivante qui définit une fonctionnelle sur une classe de fonctions $Q(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G \rightarrow \mathbb{C}$:

Définition II.8. – Soit Φ une fonction localement constante sur $Q(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G$, telle que, pour tout $N_\bullet = (N_i)_{i \in I_G} \in \mathbb{Z}^{I_G}$, l'intégrale

$$\text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N_\bullet} \Phi(g) = \frac{\int_{Q(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot \Phi(g)}{\text{vol} \{g \in Q(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G \mid \deg_Q(g) = N_\bullet\}}$$

converge.

On dira que $\Phi(g)$ admet une “moyenne virtuelle” quand $\deg_Q(g) \rightarrow +\infty$, et on notera

$$\text{Moyenne}_{\deg_Q(g) \rightarrow +\infty} \Phi(g) = M$$

lorsque

- la série formelle en $Z_\bullet = (Z_i)_{i \in I_G}$ définie comme la somme

$$\sum_{N_\bullet \in \mathbb{N}^{I_G}} Z_\bullet^{N_\bullet} \left(\text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N_\bullet} \Phi(g) \right)$$

est une fraction rationnelle,

- ses seuls pôles contenant le point $(1, 1, \dots, 1)$ sont les $Z_i = 1$, $i \in I_G$,
- son résidu en le point $(1, 1, \dots, 1)$ est M .

De plus, on dira que $\Phi(g)$ admet une moyenne quand $\deg_Q(g) \rightarrow +\infty$ si tous les pôles en les $Z_i = 1$, $i \in I_G$, sont simples et tous les autres pôles sont de la forme $Z_i = z_i^{-1}$ avec $0 < |z_i| \leq 1$.

Maintenant, prouvons :

Proposition II.9. – Considérons une fonction localement constante

$$\Phi : Q(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G \rightarrow \mathbb{C}.$$

On suppose qu'elle est invariante à gauche par $G(F)$ et à support compact sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G$.

Alors cette fonction $g \mapsto \Phi(g)$ admet une moyenne quand $\deg_Q(g) \rightarrow +\infty$, et cette moyenne vaut

$$\text{Moyenne}_{\deg_Q(g) \rightarrow +\infty} \Phi(g) = \frac{\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \Phi(g)}{\text{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G)}.$$

Remarque. Jean-Loup Waldspurger a fait remarquer à l'auteur que l'énoncé de cette proposition se déduit facilement des résultats classiques sur les pôles et les résidus des séries d'Eisenstein : on applique ces résultats à la série d'Eisenstein formée à partir de la fonction constante 1 et du sous-groupe parabolique Q de G .

La démonstration ci-dessous n'utilise que des résultats “élémentaires” de géométrie algébrique.

Démonstration. On peut supposer que Φ est un produit de fonctions définies sur les différents facteurs $\text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}$, $i \in I_G$, de G . Comme la fonction \deg_Q est elle-même un produit, on peut supposer que $G = \text{GL}_r$.

Et comme la fonction \deg_Q est invariante à droite par $K_0^G = \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$, on peut supposer qu'il en est de même de Φ . Par linéarité, on peut même supposer que Φ est la fonction caractéristique d'une seule classe modulo K_0^G dans $G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G$.

Or le quotient

$$\mathrm{GL}_r(F) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F) / \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$$

s'identifie au groupoïde des fibrés de rang r sur la courbe X , et le quotient

$$Q_{r-1,1}(F) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F) / \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$$

s'identifie au groupoïde des fibrés \mathcal{E} de rang r munis d'un homomorphisme surjectif

$$\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$$

vers un fibré inversible \mathcal{L} sur X , avec

$$\deg_Q(\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}) = r \deg(\mathcal{L}) - \deg(\mathcal{E}).$$

Le choix de la fonction caractéristique Φ revient à fixer \mathcal{E} .

On a alors les formules

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G} dg \cdot \Phi(g) = \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\mathcal{E})|}$$

et, pour tout entier N ,

$$\int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N) \cdot \Phi(g) = \sum_{\substack{(\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}) \\ r \cdot \deg(\mathcal{L}) - \deg(\mathcal{E}) = N}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L})|}$$

d'où

$$\frac{\int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N) \cdot \Phi(g)}{\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G} dg \cdot \Phi(g)} = \# \{ \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L} \mid r \deg(\mathcal{L}) - \deg(\mathcal{E}) = N \}.$$

Fixant toujours \mathcal{E} , notons alors, pour tout $d \in \mathbb{Z}$,

a_d = le nombre de quotients

$$\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L} \quad \text{avec} \quad \deg \mathcal{L} = d,$$

b_d = le nombre de flèches non nulles

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \quad \text{avec} \quad \deg \mathcal{L} = d,$$

c_d = le nombre de points à valeurs dans \mathbb{F}_q de la puissance symétrique d -ième $X^{(d)}$ de la courbe X .

Ainsi on a

$$a_d = 0 \quad \text{si} \quad d \ll 0,$$

$$b_d = 0 \quad \text{si} \quad d \ll 0,$$

$$c_d = 0 \quad \text{si} \quad d < 0,$$

et on peut former les séries de Laurent

$$A = \sum_{d \in \mathbb{Z}} a_d \cdot Z^d,$$

$$B = \sum_{d \in \mathbb{Z}} b_d \cdot Z^d,$$

$$C = \sum_{d \in \mathbb{Z}} c_d \cdot Z^d,$$

qui sont liées par la relation

$$B = A \cdot C.$$

D'après le théorème de Riemann-Roch, on a

$$b_d = |\mathrm{Pic}_X^0(\mathbb{F}_q)| \cdot (q^{(rd - \deg \mathcal{E}) + r(1 - g_X)} - 1) \cdot \frac{1}{q - 1} \quad \text{si } d \gg 0,$$

en notant g_X le genre de la courbe X et Pic_X^0 la composante neutre de son groupe de Picard. Autrement dit, la série formelle B est une fraction rationnelle, elle admet seulement deux pôles simples en $Z^{-1} = q^r$ et $Z^{-1} = 1$, et son résidu en $Z^{-1} = q^r$ est

$$|\mathrm{Pic}_X^0(\mathbb{F}_q)| \cdot q^{r(1 - g_X) - \deg \mathcal{E}} \cdot \frac{1}{q - 1}.$$

On peut préciser

$$|\mathrm{Pic}_X^0(\mathbb{F}_q)| = \prod_{1 \leq i \leq 2g_X} (1 - \alpha_i),$$

où les α_i , $1 \leq i \leq 2g_X$, désignent les valeurs propres de Frobenius agissant sur $H^1(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$.

D'autre part, on sait que

$$C = \zeta_X(Z) = \frac{\prod_{1 \leq i \leq 2g_X} (1 - \alpha_i \cdot Z)}{(1 - Z) \cdot (1 - q \cdot Z)}.$$

Comme on a l'égalité

$$A = \frac{B}{C}$$

et que toutes les valeurs propres α_i ont pour module $q^{\frac{1}{2}}$, on voit que

- la série formelle A est une fraction rationnelle,
- elle admet un pôle simple en $Z^{-1} = q^r$, avec pour résidu

$$q^{r(1 - g_X) - \deg(\mathcal{E})} \cdot \frac{(1 - q^{-r}) \cdot (1 - q^{1 - r})}{q - 1} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i \leq 2g_X} (1 - \alpha_i)}{\prod_{1 \leq i \leq 2g_X} (1 - \alpha_i \cdot q^{-r})},$$

- tous ses autres pôles sont dans le disque ouvert

$$|Z^{-1}| < q^r.$$

Maintenant, on dispose des formules de volume suivantes :

Lemme II.10. –

(i) Pour tout entier $r \geq 2$ et tout entier N , le volume de

$$Q_{r-1,1}(F) \setminus \{g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \mid \deg_Q(g) = N\} / A_G$$

est égal à

$$\mathrm{vol}(F^\times \setminus \mathbb{A}^\times / A_G) \cdot \mathrm{vol}(\mathrm{GL}_{r-1}(F) \setminus \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})^0) \cdot q^{N + (r-1)(g_X - 1)}.$$

(ii) Pour tout entier $r \geq 1$, le volume de

$$\mathrm{GL}_r(F) \setminus \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})^0$$

est égal à

$$\frac{\prod_{1 \leq i \leq 2g_X} (1 - \alpha_i)}{q - 1} \cdot \zeta_X(q^{-2}) \dots \zeta_X(q^{-r}) \cdot q^{(g_X - 1)(r^2 - 1)}.$$

□

Fin de la démonstration de la Proposition II.9. Pour tout entier $N \in \mathbb{Z}$, considérons le quotient

$$\frac{1}{\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \Phi(g)} \cdot \frac{\int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N) \cdot \Phi(g)}{\int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N)} = M_N.$$

Si $N + \deg(\mathcal{E})$ n'est pas multiple de r , ce quotient vaut 0.

Si au contraire $rd - \deg(\mathcal{E}) = N$ avec $d \in \mathbb{Z}$, ce quotient est égal à

$$\frac{a_d}{\text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G) \cdot \text{vol}(\text{GL}_{r-1}(F) \backslash \text{GL}_{r-1}(\mathbb{A})^0) \cdot q^{rd - \deg(\mathcal{E}) + (r-1)(g_X - 1)}}.$$

Compte tenu de ce qu'on a déjà montré pour la série $A = \sum_{d \in \mathbb{Z}} a_d \cdot Z^d$, on obtient que la série formelle

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} M_N \cdot Z^N$$

vérifie les propriétés suivantes :

- c'est une fraction rationnelle,
- elle admet un pôle simple en $Z = 1$, avec pour résidu

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{q^{(2r-1)(1-g_X)} \cdot \prod_{1 \leq i \leq 2g_X} (1 - \alpha_i)}{\text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G) \cdot \text{vol}(\text{GL}_{r-1}(F) \backslash \text{GL}_{r-1}(\mathbb{A})^0) \cdot \zeta_X(q^{-r}) \cdot (q - 1)}$$

- tous ses autres pôles sont dans le disque fermé

$$|Z^{-1}| \leq 1.$$

D'après le Lemme II.10(ii), on a

$$\text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0}) \cdot (q - 1) = \prod_{1 \leq i \leq g_X} (1 - \alpha_i)$$

et

$$\text{vol}(\text{GL}_{r-1}(F) \backslash \text{GL}_{r-1}(\mathbb{A})^0) \cdot \zeta_X(q^{-r}) \cdot q^{(2r-1)(g_X - 1)} = \text{vol}(\text{GL}_r(F) \backslash \text{GL}_r(\mathbb{A})^0),$$

donc notre résidu en le pôle simple $Z = 1$ est encore égal à

$$\frac{1}{r \cdot |\mathbb{Z}/\deg(A_G)| \cdot \text{vol}(\text{GL}_r(F) \backslash \text{GL}_r(\mathbb{A})^0)} = \frac{1}{\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G)}.$$

C'est ce qu'on voulait. □

La Proposition II.9 s'applique aux noyaux cuspidaux

$$g \mapsto \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{G,\pi}(g, g) = K_h^{G,\pi}(g, g)$$

et on obtient :

Corollaire II.11. – Soit $\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G/A_G)$ une représentation automorphe cuspidale de G .
Pour toute fonction de Hecke $h \in \mathcal{H}^G/A_G$, la fonction

$$g \mapsto \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{G,\pi}(g, g)$$

sur $Q(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G$ admet une moyenne quand $\deg_Q(g) \rightarrow +\infty$, et cette moyenne vaut

$$\text{Moyenne}_{\deg_Q(g) \rightarrow +\infty} \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{G,\pi}(g, g) = \frac{\text{Tr}_\pi(h)}{\text{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G)}.$$

□

Dans la situation du Théorème II.7 où on considère un homomorphisme de transfert essentiellement injectif

$$\begin{array}{ccc} L_G & \xrightarrow{\rho} & L_H \\ & \searrow & \swarrow \\ & W_F & \end{array}$$

entre les L -groupes de deux groupes linéaires G et H , on obtient la formule

$$\begin{aligned} & \text{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G) \cdot \text{vol}(H(F)\backslash H(\mathbb{A})/A_H) \cdot \text{Moyenne}_{\substack{\deg_Q(g) \rightarrow +\infty \\ \deg_Q(g') \rightarrow +\infty}} \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^G(g, g) *_{\rho} \Lambda_1 \Lambda_2 K_{h'}^H(g', g') \\ = & \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G/A_G) \\ \pi' \in \Pi_{\text{cusp}}(H/A_H) \\ \pi' = \rho_* \pi}} \text{Tr}_\pi(h) \cdot \text{Tr}_{\pi'}(h'), \end{aligned}$$

pour toutes fonctions de Hecke $h \in \mathcal{H}^G/A_G$ et $h' \in \mathcal{H}^H/A_H$.

De même, on a pour toutes fonctions de Hecke $h, h_1 \in \mathcal{H}^G/A_G$ la formule

$$\text{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G)^2 \cdot \text{Moyenne}_{\substack{\deg_Q(g) \rightarrow +\infty \\ \deg_Q(g') \rightarrow +\infty}} \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^G(g, g) * \Lambda_1 \Lambda_2 K_{h_1}^H(g', g') = \sum_{\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G/A_G)} \text{Tr}_\pi(h) \cdot \text{Tr}_\pi(h_1).$$

Ici encore, on ne peut avoir une égalité entre ces deux formules quand $h_1 = \rho^* h'$, car certaines représentations du spectre cuspidal de G ne se transfèrent pas dans le spectre cuspidal de H .

Exposé III : Développements asymptotiques

Dans le cadre d'un homomorphisme de transfert ${}^L G \xrightarrow{\rho} {}^L H$ entre les L -groupes de deux groupes linéaires G et H dont le premier est abélien, nous montrons comment ne pas perdre la partie du spectre automorphe de G dont le transfert par ρ est dans le spectre d'Eisenstein de H . Dans une prochaine publication, nous généraliserons cette approche au cadre du transfert automorphe entre deux groupes linéaires quelconques.

La plus grande partie du travail se fait sur un seul groupe linéaire, avant d'être finalement appliquée au groupe d'arrivée H .

Nous donnons des démonstrations complètes seulement dans le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2 via une extension quadratique.

1 L'opérateur de Shalika appliqué aux séries d'Eisenstein

Nous sommes toujours en compagnie d'un groupe algébrique linéaire

$$G = \prod_{i \in I_G} \mathrm{Res}_{E_i/F} \mathrm{GL}_{r_i}.$$

Considérons une paire discrète (P, π) telle que $P \in \mathcal{P}_0$ soit un sous-groupe parabolique non trivial de G et que tous les facteurs de π soient cuspidaux.

Si $h \in \mathcal{H}^G/A_G$ est une fonction de Hecke invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert K de K_0^G , on peut écrire

$$\Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{(P, \pi)}(g_1, g_2) = \frac{1}{|\mathrm{Fixe}(\pi)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\mathrm{Im} \Lambda_P} d\lambda_P \cdot \Lambda E_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P)(g_1) \cdot \overline{\Lambda E_P^G(\varphi, \lambda_P)(g_2)}$$

si bien que pour évaluer $\Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{(P, \pi)}(\bullet, \bullet)$, on doit étudier les expressions

$$\Lambda E_P^G(\varphi, \lambda_P)$$

pour toute fonction $\varphi \in L_K^2(M_P(F) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/A_G, \pi)$ et quand λ_P décrit le tore Λ_P .

Commençons par étudier les coefficients de Fourier

$$W E_P^G(\varphi, \lambda_P)(g) = \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} dn_B \cdot \psi_B(n_B) \cdot E_P^G(\varphi, \lambda_P)(n_B \cdot g).$$

Ce sont des fractions rationnelles en $\lambda_P \in \Lambda_P$.

Plaçons-nous dans l'ouvert de Λ_P (constitué des λ_P tels que $|\lambda_P| \gg \rho_P$ au sens du paragraphe VI.1.d, page 281, du livre [Lafforgue, 1997]) où la série d'Eisenstein $E_P^G(\varphi, \lambda_P)(\bullet)$ est définie par la série absolument convergente

$$E_P^G(\varphi, \lambda_P)(g) = \sum_{\delta \in P(F) \backslash G(F)} (\varphi \cdot \lambda_P)(\delta \cdot g).$$

Il n'y a pas de restriction à supposer que le sous-groupe parabolique $P^{\text{op}} \in \mathcal{P}_0$ opposé de P contienne B ou, si l'on préfère, que P contienne B^{op} , le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures. Dans ce cas, on a :

Lemme III.1. (Shahidi, Langlands) – *Pour tous P, π et φ comme ci-dessus, et si $P^{\text{op}} \supseteq B$, on a pour tout λ_P de l'ouvert de Λ_P où la série d'Eisenstein $E_P^G(\varphi, \lambda_P)$ converge absolument*

$$WE_P^G(\varphi, \lambda_P)(g) = \int_{M_P(F) \cap N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} dn_B \cdot \psi_B(n_B) \cdot (\varphi \cdot \lambda_P)(n_B \cdot g).$$

Démonstration. On part de la définition de

$$E_P^G(\varphi, \lambda_P)(g) = \sum_{\delta \in P(F) \backslash G(F)} (\varphi \cdot \lambda_P)(\delta \cdot g)$$

comme série convergente.

D'après la décomposition de Bruhat de $G(F)$, on peut écrire

$$P(F) \backslash G(F) = \coprod_{w \in W_{M_P} \backslash W_G} \{w \cdot \eta_B \mid \eta_B \in (w^{-1} P(F) w \cap N_B(F)) \backslash N_B(F)\}$$

d'où on tire la formule

$$WE_P^G(\varphi, \lambda_P)(g) = \sum_{w \in W_{M_P} \backslash W_G} \int_{w^{-1} P(F) w \cap N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} dn_B \cdot \psi_B(n_B) \cdot (\varphi \cdot \lambda_P)(w \cdot n_B \cdot g).$$

L'hypothèse $P^{\text{op}} \supseteq B$ entraîne que si $w \in W_{M_P} \backslash W_G$ est différent de la classe de l'identité, la restriction du caractère ψ_B à $N_B(\mathbb{A}) \cap w^{-1} P(F) w$ est non triviale, et donc l'intégrale ci-dessus d'indice w vaut 0. La seule contribution qui subsiste est celle associée à $w = \text{Id}$, et elle vaut

$$\int_{P(F) \cap N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} dn_B \cdot \psi_B(n_B) \cdot (\varphi \cdot \lambda_P)(n_B \cdot g).$$

On conclut en remarquant que $P \cap N_B = M_P \cap N_B$ puisque $P^{\text{op}} \supseteq B$. □

Nous voulons maintenant donner des propriétés générales des sommes

$$\Lambda E_P^G(\varphi, \lambda_P)(g) = \sum_{\gamma \in N_B^-(F) \backslash G^-(F)} WE_P^G(\varphi, \lambda_P)(\gamma \cdot g).$$

Dans ce but, notons $\mathcal{L}_{K, \psi_B}(Z_G(F) \cdot N_B(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ l'espace des fonctions

$$\varphi : Z_G(F) \cdot N_B(F) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que

- φ est invariante à droite par le sous-groupe ouvert K de K_0^G ,
- $\varphi(n_B \cdot g) = \psi_B(n_B)^{-1} \cdot \varphi(g)$, $\forall n_B \in N_B(\mathbb{A})$, $\forall g \in G(\mathbb{A})$.

Et notons $\mathcal{L}_{K, \text{cusp}}(Q(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ l'espace des fonctions

$$\varphi' : Q(F) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que

- φ' est invariante à droite par K ,
- pour tout sous-groupe parabolique non trivial $P \subsetneq G$ tel que $N_P \subseteq N_B$, soit $P \supseteq B$, on a

$$\int_{N_P(F) \backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \varphi'(n_P \cdot g) = 0, \quad \forall g \in G(\mathbb{A}).$$

Enfin, rappelons qu'on dispose sur $G(\mathbb{A})$ des applications “degrés absolus”

$$\text{deg} : G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{Z}^{I_G},$$

et “degrés relatifs à Q ”

$$\text{deg}_Q : Q(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G \rightarrow \mathbb{Z}^{I_G},$$

qui sont toutes deux invariantes à droite par K_0^G . On a :

Proposition III.2. – *On fixe un sous-groupe ouvert K de K_0^G .*

(i) *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{L}_{K, \psi_B}(Z_G(F) \cdot N_B(F) \backslash G(\mathbb{A}))$, la somme*

$$\varphi'(g) = \sum_{\gamma \in N_B^-(F) \backslash G^-(F)} \varphi(\gamma \cdot g)$$

est localement finie.

(ii) *Cette somme définit un isomorphisme*

$$\mathcal{L}_{K, \psi_B}(Z_G(F) \cdot N_B(F) \backslash G(\mathbb{A})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{K, \text{cusp}}(Q(F) \backslash G(\mathbb{A}))$$

dont l'isomorphisme réciproque est

$$\varphi' \mapsto \varphi = \left(g \mapsto \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} dn_B \cdot \psi_B(n_B) \cdot \varphi'(n_B \cdot g) \right).$$

(iii) *Si on se restreint aux $g \in Q(F) \backslash G(\mathbb{A})$ dont les images par deg et deg_Q sont fixées, les supports de toutes les fonctions $\varphi' \in \mathcal{L}_{K, \text{cusp}}(Q(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ sont contenus dans une partie compacte qui ne dépend que de K .*

Démonstration. Pour chacune des assertions de la proposition, il suffit de traiter le cas où $G = \text{GL}_r$.

(i) Considérons une fonction φ de l'espace $\mathcal{L}_{K, \psi_B}(Z_G(F) \cdot N_B(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ et un point $g \in G(\mathbb{A})$. Ce point a une décomposition d'Iwasawa de la forme

$$g = n \cdot m \cdot k_0$$

avec

$$\begin{aligned} k_0 &\in K_0^G = \text{GL}_r(O_{\mathbb{A}}), \\ n &\in N_r(\mathbb{A}), \\ m &\in M_{B_r}(\mathbb{A}) = T_G(\mathbb{A}) = (\mathbb{A}^\times)^r. \end{aligned}$$

On a

$$\varphi(g) = \psi_r^{-1}(n) \cdot \varphi(m \cdot k_0),$$

et comme φ est invariante à droite par K , on voit que $\varphi(g)$ ne peut être non nul que si la restriction de ψ_r à $N_r(\mathbb{A}) \cap m \cdot k_0 \cdot K \cdot k_0^{-1} \cdot m^{-1}$ est triviale. En notant $m = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, cela impose que

$$\forall x \in |X|, \quad \forall i < r, \quad v_x(\lambda_i) - v_x(\lambda_{i-1}) \geq -a_x$$

pour une famille d'entiers $a_x \in \mathbb{N}$, $x \in |X|$, presque tous nuls et qui ne dépendent que de K . On a montré :

Lemme III.3. – *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{L}_{K,\psi_B}(Z_G(F) \cdot N_B(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ et tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, l'ensemble*

$$\{g' \in Z_G(F) N_B(F) \backslash Q(\mathbb{A}) \mid \deg(g') = 0, \deg_Q(g') = 0, \varphi(g' \cdot g) \neq 0\}$$

est contenu dans une partie compacte qui ne dépend que de K et g . □

Suite de la démonstration de la Proposition III.2.

(i) résulte de ce que $N_B^-(F) \backslash G^-(F)$ est une partie discrète de $Z_G(F) N_B(F) \backslash Q(\mathbb{A})$.

(ii) Considérons $\varphi \in \mathcal{L}_{K,\psi_B}(Z_G(F) N_B(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ et la fonction associée

$$\varphi' : g \mapsto \varphi'(g) = \sum_{\gamma \in N_B^-(F) \backslash G^-(F)} \varphi(\gamma \cdot g) = \sum_{\gamma \in Z_G(F) N_B(F) \backslash Q(F)} \varphi(\gamma \cdot g).$$

La décomposition de Bruhat permet d'écrire

$$Z(F) N_B(F) \backslash Q(F) = \coprod_w \{w \cdot \eta \mid \eta \in Z_G(F) \cdot (w^{-1} N_B(F) w \cap N_B(F)) \backslash B(F)\}$$

où w décrit l'ensemble des éléments de $W_G = \mathfrak{S}_r$ tels que $w(r) = r$.

On a donc

$$\varphi'(g) = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_r \\ w(r)=r}} \sum_{\eta \in Z_G(F) \cdot (w^{-1} N_B(F) w \cap N_B(F)) \backslash B(F)} \varphi(w\eta \cdot g).$$

Mais pour tout sous-groupe parabolique non trivial $P \subsetneq G$ tel que $N_B \supseteq N_P$, soit $B \subseteq P$, et pour toute permutation $w \in \mathfrak{S}_r$ telle que $w(r) = r$, la restriction du caractère ψ_B à $N_B(\mathbb{A}) \cap w N_P(\mathbb{A}) w^{-1}$ est non triviale, et donc

$$\int_{N_P(F) \backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \varphi'(n_P \cdot g) = 0, \quad \forall g \in G(\mathbb{A}),$$

ce qui signifie que la fonction φ' est élément de l'espace $\mathcal{L}_{K,\text{cusp}}(Q(F) \backslash G(\mathbb{A}))$.

De plus, pour toute permutation $w \in \mathfrak{S}_r = W_G$ telle que $w(r) = r$, la restriction du caractère ψ_B à $N_B(\mathbb{A}) \cap w N_B(\mathbb{A}) w^{-1}$ ne se confond avec celle du caractère $\psi_B(w^{-1} \bullet w)$ que si w est la permutation identique. Cela montre

$$\int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} dn_B \cdot \psi_B(n_B) \cdot \varphi'(n_B \cdot g) = \varphi(g).$$

Réciproquement, la preuve que pour toute fonction $\varphi' \in \mathcal{L}_{K,\text{cusp}}(Q(F) \backslash G(\mathbb{A}))$, on a

$$\varphi'(g) = \sum_{\gamma \in N_B^-(F) \backslash G^-(F)} \varphi(\gamma \cdot g)$$

si on pose $\varphi(g) = \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} dn_B \cdot \psi_B(n_B) \cdot \varphi'(n_B \cdot g)$ est donnée dans le paragraphe 5 de [Shalika,1974].

(iii) Considérons une fonction $\varphi' \in \mathcal{L}_{K,\text{cusp}}(Q(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ et la fonction $\varphi \in \mathcal{L}_{K,\psi_B}(Z_B(F) N_B(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ qui lui correspond. Elles sont reliées par la formule

$$\varphi'(g) = \sum_{\gamma \in Z_B(F) N_B(F) \backslash Q(F)} \varphi(\gamma \cdot g).$$

La conclusion résulte alors du Lemme III.3. □

Toutes les assertions de la Proposition III.2 s'appliquent donc aux séries

$$\Lambda E_P^G(\varphi, \lambda_B)(g) = \sum_{\gamma \in N_B^-(F) \backslash G^-(F)} W E_P^G(\varphi, \lambda_B)(\gamma \cdot g).$$

En particulier, si on se restreint aux $g \in Q(F) \backslash G(\mathbb{A})$ dont les images par \deg et \deg_Q sont fixées, les supports de toutes les fonctions

$$g \mapsto \Lambda E_P^G(\varphi, \lambda_B)(g)$$

sont contenus dans une partie compacte qui ne dépend pas de $\lambda_B \in \Lambda_B$ et de φ mais seulement de K .

A partir de la fonction

$$g \mapsto \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{(P, \pi)}(g, g),$$

on peut donc introduire la série formelle en le paquet de variables $Z_\bullet = (Z_i)_{i \in I_G}$ définie comme la somme

$$\sum_{N_\bullet \in \mathbb{N}^{I_G}} Z_\bullet^{N_\bullet} \cdot \left(\text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N_\bullet} \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{(P, \pi)}(g, g) \right)$$

où on rappelle que par définition

$$\text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N_\bullet} \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{(P, \pi)}(g, g) = \frac{\int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{(P, \pi)}(g, g)}{\text{vol}\{g \in Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G \mid \deg_Q(g) = N_\bullet\}}.$$

Notre but est de montrer que cette série formelle est une fraction rationnelle et d'étudier ses pôles.

2 Diagonalisation des noyaux d'Eisenstein transformés

Rappelons que pour toute fonction

$$\begin{aligned} \Phi : [G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G]^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (g_1, g_2) &\mapsto \Phi(g_1, g_2) \end{aligned}$$

invariante à droite en les 2 variables par un sous-groupe ouvert K de K_0^G , on a posé

$$W_1 W_2 \Phi(g_1, g_2) = \iint_{[N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})]^2} dn_1 \cdot dn_2 \cdot \psi_B(n_1) \cdot \psi_B(n_2) \cdot \Phi(n_1 g_1, n_2 g_2)$$

puis

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \Phi(g_1, g_2) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2 \in N_B^-(F) \backslash G^-(F)} W_1 W_2 \Phi(\gamma_1 g_1, \gamma_2 g_2).$$

Montrons :

Lemme III.4. – *Pour toute fonction*

$$\Phi : [G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G]^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

comme ci-dessus, et à condition de poser

$$W_1 \overline{W_2} \Phi(g_1, g_2) = \iint_{[N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})]^2} dn_1 \cdot dn_2 \cdot \psi_B(n_1) \cdot \overline{\psi_B(n_2)} \cdot \Phi(n_1 g_1, n_2 g_2),$$

on a pour tout $N_\bullet \in \mathbb{Z}^{I_G}$ l'égalité

$$\begin{aligned}
& \int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot \Lambda_1 \Lambda_2 \Phi(g, g) \\
&= \int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot \sum_{\gamma \in N_B^-(F) \backslash G^-(F)} W_1 \overline{W}_2 \Phi(\gamma g, \gamma g) \\
&= \int_{Z_G(F) N_B(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot W_1 \overline{W}_2 \Phi(g, g).
\end{aligned}$$

Démonstration. La définition de l'opérateur Λ ne dépend pas du choix du caractère ψ_B , donc on a

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \Phi(g_1, g_2) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2 \in N_B^-(F) \backslash G^-(F)} W_1 \overline{W}_2 \Phi(\gamma_1 g_1, \gamma_2 g_2).$$

Il n'y a pas de restriction à supposer que la fonction Φ est un produit de fonctions définies sur les différents facteurs de $G = \prod_{1 \leq i \leq k_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}$. Comme tous les groupes qui apparaissent, $G, N_B, Q, G^-, N_B^-, Z_G$, sont des produits de facteurs indexés par les indices $i \in I_G$, on peut supposer que G compte un seul facteur puis que $G = \text{GL}_r$.

Alors on a :

$$\begin{aligned}
Q = Q_{r-1,1} &= \left\{ \begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \\
G^- = \text{GL}_r^- &= \left\{ \begin{pmatrix} * & \dots & * & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
N_B^- = N_r^- &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Considérons l'ensemble des paires

$$(\gamma_1, \gamma_2)$$

d'éléments de $N_r^-(F) \backslash \text{GL}_r^-(F)$.

Le groupe $\text{GL}_r^-(F)$ agit à droite sur cet ensemble, qui se décompose donc en orbites dont l'une est la diagonale. Soit Γ une des orbites différentes de la diagonale. L'expression

$$\sum_{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma} \iint_{[N_r(F) \backslash N_r(\mathbb{A})]^2} dn_1 \cdot dn_2 \cdot \psi_r(n_1 \cdot n_2^{-1}) \cdot \Phi(n_1 \gamma_1 g, n_2 \gamma_2 g)$$

vue comme fonction de $g \in G(\mathbb{A})$ reste invariante à gauche par $Q_{r-1,1}(F)$ et A_G .

Il s'agit de prouver que son image par la fonctionnelle d'intégration

$$\int_{Q_{r-1,1}(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N),$$

vaut 0.

Pour tout rang r' , $1 \leq r' < r$, on peut identifier $\mathrm{GL}_{r'}$ au sous-groupe des matrices de la forme

$$\left(\begin{array}{cccc} * & \vdots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots \\ & \vdots & 0 & 1 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} r' \\ \\ \\ \} r - r' \end{array} \right.$$

dans GL_r . Les sous-groupes

$$Q_{r'} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \right\} = \mathrm{GL}_{r'-1} \cdot N_{r'}$$

et

$$V_{r'} = \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \right\}$$

de $\mathrm{GL}_{r'}$ peuvent alors être eux-mêmes considérés comme des sous-groupes de GL_r .

Pour tout entier r' , $1 \leq r' < r$, on peut noter $\Gamma_{r'}$ l'image de l'orbite Γ dans

$$[Q_{r'}(F) N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)]^2.$$

Par hypothèse, l'orbite Γ est différente de la diagonale de

$$[N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)]^2,$$

donc il existe un entier r' , $1 \leq r' \leq r-1$, tel que l'orbite $\Gamma_{r'}$ soit différente de la diagonale mais que, si $r' < r-1$, l'orbite $\Gamma_{r'+1}$ soit égale à la diagonale.

Si $r' = r-1$, on notera $\Gamma_{r'+1} = [\mathrm{GL}_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)]^2 = \{1\}^2$.

Considérons un élément quelconque de $\Gamma_{r'+1}$ représenté par un couple (γ, γ) avec $\gamma \in \mathrm{GL}_{r-1}(F)$. Les éléments de Γ dont l'image dans $\Gamma_{r'+1}$ est égale à (γ, γ) sont ceux de la forme

$$(\gamma_1 \cdot \gamma, \gamma_2 \cdot \gamma)$$

où (γ_1, γ_2) décrit une orbite de

$$[N_{r'}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r'}(F)]^2$$

sous l'action de $\mathrm{GL}_{r'}(F)$ dont l'image dans

$$[Q_{r'}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r'}(F)]^2$$

est différente de la diagonale.

Or on remarque que les caractères non triviaux de $V_{r'+1}(F) \backslash V_{r'+1}(\mathbb{A})$ sont exactement ceux de la forme

$$n \mapsto \psi_r(\gamma' \cdot n)$$

avec $\gamma' \in Q_{r'}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r'}(F)$, cette correspondance étant bijective.

Comme tous nos couples (γ_1, γ_2) sont en dehors de la diagonale de

$$[Q_{r'}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r'}(F)]^2,$$

on en déduit que la moyenne des expressions

$$\sum_{(\gamma_1, \gamma_2)} \iint_{[N_r(F) \backslash N_r(\mathbb{A})]^2} dn_1 \cdot dn_2 \cdot \psi_r(n_1 \cdot n_2^{-1}) \cdot \Phi(n_1 \gamma_1 \gamma n g, n_2 \gamma_2 \gamma n g)$$

sur les $n \in \gamma^{-1} \cdot [V_{r'+1}(F) \backslash V_{r'+1}(\mathbb{A})] \cdot \gamma$ vaut nécessairement 0.

Cela entraîne la conclusion voulue puisque la fonction deg_Q est invariante à gauche par $\gamma^{-1} \cdot V_{r'+1}(\mathbb{A}) \cdot \gamma$. \square

En appliquant ce lemme aux noyaux $K_h^{(P, \pi)}$, on obtient :

Lemme III.5. – Soient (P, π) une paire discrète telle que $P \subsetneq G$ et que π soit cuspidale, et $h \in \mathcal{H}^G / A_G$ une fonction de Hecke invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert K de K_0^G .

Alors on a pour tout $N_\bullet \in \mathbb{Z}^{I_G}$

$$\begin{aligned} & \int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\mathrm{deg}_Q(g) = N_\bullet) \cdot \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{(P, \pi)}(g, g) \\ &= \mathrm{vol}(Z_G(F) \backslash Z_G(\mathbb{A}) / A_G) \cdot \frac{1}{|\mathrm{Fixe}(\pi)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\mathrm{Im} \Lambda_P} d\lambda_P \\ & \cdot \int_{N_B(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / Z_G(\mathbb{A})} dg \cdot \mathbf{1}(\mathrm{deg}_Q(g) = N_\bullet) \cdot W E_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P)(g) \cdot \overline{W E_P^G(\varphi, \lambda_P)(g)}. \end{aligned}$$

\square

On remarque que dans l'expression de ce lemme, l'intégrale adélique $\int_{N_B(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / Z_G(\mathbb{A})} dg$ est un produit d'opérateurs d'intégration locaux définis place par place. De même, les coefficients de Fourier $W E_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P)(\bullet)$ et $W E_P^G(\varphi, \lambda_P)(\bullet)$ se calculent place par place d'après le Lemme III.1 : ce sont simplement les modèles de Whittaker des fonctions $h(\varphi, \lambda_P) \cdot \lambda_P$ et $\varphi \cdot \lambda_P$.

Il en résulte que les expressions du lemme ci-dessus doivent pouvoir se calculer par déplacement de contours et calcul de résidus de fonctions analytiques définies comme des produits eulériens d'intégrales locales.

Nous allons mener tous ces calculs dans le cas où $G = \mathrm{GL}_2$.

3 Le cas $G = \mathrm{GL}_2$: calcul de résidus

Nous allons mener les calculs jusqu'au bout dans le cas où $G = \mathrm{GL}_2$.

Dans ce cas, $Q = B$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures dans GL_2 , et les seules séries d'Eisenstein que nous ayons à considérer sont celles associées à $P = B^{\mathrm{op}}$ (attention ! toutes les séries d'Eisenstein que nous considérons sont donc construites à partir du sous-groupe de Borel des matrices

triangulaires *inférieures* dans GL_2) et à une paire de caractères $\pi = (\chi_1, \chi_2)$ de $F^\times \backslash \mathbb{A}^\times$ telle que $\chi_1 \chi_2$ soit trivial sur $A_G \subset Z_G(\mathbb{A}) = \mathbb{A}^\times$.

Lemme III.6. – Dans cette situation, et en notant $Z = q^{-t}$, la série

$$\sum_{N \in \mathbb{Z}} \frac{\int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N) \cdot \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{P, \pi}(g, g)}{\int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N)} \cdot Z^N$$

est égale, dès que $\operatorname{Re} t \gg 0$, à

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})} \cdot \frac{1}{|\operatorname{Fixe}(\pi)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\operatorname{Im} \Lambda_P} d\lambda_P$$

$$\int_{K_0^G} dk \cdot \int_{\mathbb{A}^\times} d\mu \cdot |\mu|^t \cdot WE_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{WE_P^G(\varphi, \lambda_P) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}.$$

Démonstration. On sait d'après le Lemme II.10(i) que pour tout $N \in \mathbb{Z}$ le volume

$$\int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N)$$

est égal à

$$\operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G) \cdot \operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0}) \cdot q^{N+(gx-1)}.$$

D'autre part, si on écrit $g = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k$, la fonctionnelle d'intégration

$$\int_{N_B(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/Z_G(\mathbb{A})} dg$$

est égale à

$$q^{gx-1} \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot \int_{\mathbb{A}^\times} d\mu \cdot |\mu|^{-1}$$

avec $|\mu|^{-1} = q^N$ si $N = \deg_Q(g) = -\deg(\mu)$.

Alors le Lemme III.6 est une réécriture du Lemme III.5. □

Pour toute $\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)$, ceci amène à considérer la fonction analytique

$$\int_{K_0^G} dk \cdot \int_{\mathbb{A}^\times} d\mu \cdot |\mu|^t \cdot WE_P^G(h(\varphi, \lambda_1), \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{WE_P^G(\varphi, \bar{\lambda}_2^{-1}) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}$$

en $t \in \mathbb{C}$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_P$.

On rappelle que Λ_P est le tore complexe des caractères

$$(\mathbb{A}^\times \times \mathbb{A}^\times) / A_G \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

qui se factorisent à travers

$$\deg : (\mathbb{A}^\times \times \mathbb{A}^\times) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

On peut supposer que $\deg : A_G \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, et alors λ_1 et λ_2 peuvent s'écrire

$$\lambda_1 = (|\bullet|^{s_1}, |\bullet|^{-s_1})$$

$$\lambda_2 = (|\bullet|^{s_2}, |\bullet|^{-s_2})$$

avec $s_1, s_2 \in \mathbb{C}/\frac{2\pi i}{\log(q)} \cdot \mathbb{Z}$.

On a encore :

Lemme III.7. – Si $\operatorname{Re} t \gg 0$, $\operatorname{Re} s_1 \gg 0$ et $\operatorname{Re} s_2 \ll 0$, l'intégrale

$$\int_{K_0^G} dk \cdot \int_{\mathbb{A}^\times} d\mu \cdot |\mu|^t \cdot WE_P^G(h(\varphi, \lambda_1), \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{WE_P^G(\varphi, \bar{\lambda}_2^{-1}) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}$$

est égale à

$$\int_{\mathbb{A}^\times} d\mu \cdot |\mu|^{1+t+s_1-s_2} \cdot \int_{\mathbb{A} \times \mathbb{A}} du_1 \cdot du_2 \cdot \psi(\mu \cdot (u_1 - u_2)) \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1}) \left(\begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}.$$

Démonstration. Si $\operatorname{Re} s_1 \gg 0$, on sait d'après le Lemme III.1 que

$$WE_P^G(h(\varphi, \lambda_1), \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) = \int_{\mathbb{A}} du_1 \cdot \psi(u_1) \cdot (h(\varphi \cdot \lambda_1) \cdot \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot k \right).$$

Or on a

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot k = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu^{-1} \cdot u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot k$$

puis

$$(h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot k \right) = |\mu|^{-\frac{1}{2}+s_1} \cdot \chi_1(\mu) \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} 1 & \mu^{-1} \cdot u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot k \right)$$

et de même

$$\overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1}) \left(\begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot k \right)} = |\mu|^{-\frac{1}{2}-s_2} \cdot \overline{\chi_1(\mu)} \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1}) \left(\begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \cdot u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot k \right)}.$$

On conclut en changeant les variables u_1 et u_2 en $\mu^{-1} \cdot u_1$ et $\mu^{-1} \cdot u_2$. □

Nous allons maintenant démontrer :

Théorème III.8. – Toujours avec les mêmes notations, l'intégrale

$$\int_{K_0^G} dk \cdot \int_{\mathbb{A}^\times} d\mu \cdot |\mu|^t \cdot WE_P^G(h(\varphi, \lambda_1), \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{WE_P^G(\varphi, \bar{\lambda}_2^{-1}) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}$$

vue comme fonction analytique en les variables q^{-t} , q^{-s_1} , q^{-s_2} vérifie les propriétés suivantes :

(i) C'est le produit de

$$\frac{\zeta_X(1+t+s_1-s_2) \cdot \zeta_X(1+t-s_1+s_2)}{\zeta_X(2+2t)} \cdot \frac{L\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, 1+t-s_1-s_2\right)}{L\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, 1-2s_1\right)} \cdot \frac{L\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, 1+t+s_1+s_2\right)}{L\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, 1+2s_2\right)}$$

et d'une fraction rationnelle qui n'a pas de pôle dans la zone

$$\operatorname{Re}(t + s_1 - s_2) > -1, \operatorname{Re}(t - s_1 + s_2) > -1, \operatorname{Re}(t - s_1 - s_2) > -1, \operatorname{Re}(t + s_1 + s_2) > -1,$$

$$\operatorname{Re}(t) > -1, \operatorname{Re}(-2s_1) > -1, \operatorname{Re}(2s_2) > -1.$$

(ii) Le résidu de son pôle simple en $t + s_1 - s_2 = 0$ est le produit du facteur

$$\frac{\operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})}{q^{gx-1}} \cdot \frac{\zeta_X(1+2t)}{\zeta_X(2+2t)}$$

et de l'intégrale

$$\int_{K_0^G} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1)(k) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1})(k)}.$$

(iii) Le résidu de son pôle simple en $t - s_1 + s_2 = 0$ est le produit du facteur

$$\frac{\operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})}{q^{gx-1}} \cdot \frac{\zeta_X(1+2t)}{\zeta_X(2+2t)}$$

et de l'intégrale

$$\int_{K_0^G} dk \cdot (M_P^P(h(\varphi, \lambda_1), \lambda_1) \cdot \lambda_1^{\text{op}})(k) \cdot \overline{(M_P^P(\varphi, \bar{\lambda}_2^{-1}) \cdot \bar{\lambda}_2^{\text{op}^{-1}})(k)}.$$

(iv) Lorsque $\chi_1 = \chi_2$, le résidu en le pôle simple $t - s_1 - s_2 = 0$ est le produit du facteur

$$\frac{\operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})}{q^{gx-1}} \cdot \frac{\zeta_X(1+2t)}{\zeta_X(2+2t)}$$

et de l'intégrale

$$\int_{K_0^G} dk \cdot (M_P^P(h(\varphi, \lambda_1), \lambda_1) \cdot \lambda_1^{\text{op}})(k) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1})(k)},$$

tandis que le résidu en le pôle simple $t + s_1 + s_2 = 0$ est le produit du facteur

$$\frac{\operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})}{q^{gx-1}} \cdot \frac{\zeta_X(1+2t)}{\zeta_X(2+2t)}$$

et de l'intégrale

$$\int_{K_0^G} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1)(k) \cdot \overline{(M_P^P(\varphi, \bar{\lambda}_2^{-1}) \cdot \bar{\lambda}_2^{\text{op}^{-1}})(k)}.$$

Remarque. On pourrait donner de ce théorème une démonstration courte en utilisant les formules sur les modèles de Whittaker disponibles dans la littérature. Mais nous préférons refaire tous les calculs, au moins en les places sans ramification.

Démonstration. (i) Notre intégrale est le produit sur toutes les places $x \in |X|$ de sommes d'intégrales locales de la forme

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}} q_x^{(-1-t-s_1+s_2) \cdot v} \cdot S_{x,v}$$

avec

$$\begin{aligned} S_{x,v} &= \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) = v) \cdot \int_{F_x \times F_x} \psi_x(\mu \cdot (u_1 - u_2)) \cdot du_1 \cdot du_2 \cdot \int_{\text{GL}_2(O_x)} dk \\ &\quad (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1)_x \left(\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1})_x \left(\begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}. \end{aligned}$$

Plaçons-nous en une place x où

- le facteur local K_x de K est égal à $K_{0,x}^G = \mathrm{GL}_2(O_x)$, si bien que h, φ et χ_1, χ_2 sont non ramifiés,
- le caractère ψ_x de F_x est régulier, c'est-à-dire trivial sur O_x mais pas sur $\pi_x^{-1} \cdot O_x$.

On remarque que si $v_x(u_1) \geq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(O_x)$$

tandis que si $v_x(u_1) < 0$, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 1 & u_1^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} u_1^{-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(O_x).$$

On en déduit que l'intégrale

$$\int_{\mathrm{GL}_2(O_x)} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1)_x \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1})_x \left(\begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}$$

est égale au produit de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{GL}_2(O_x)} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1)_x(k) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1})_x(k)} = S_x$$

et du facteur

$$\left[q_x^{-1} \cdot z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \cdot q_x^{2s_1} \right]^{\max\{0, -v_x(u_1)\}} \cdot \left[q_x^{-1} \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \cdot q_x^{-2s_2} \right]^{\max\{0, -v_x(u_2)\}}.$$

Par conséquent, l'intégrale $S_{x,v}$ est le produit de l'intégrale S_x ci-dessus et d'un facteur égal à

- 0 si $v < 0$,
- et si $v \geq 0$

$$\begin{aligned} & \left[1 + \sum_{1 \leq v' \leq v} \left(1 - \frac{1}{q_x} \right) \cdot q_x^{v'} \cdot \left(q_x^{-1} \cdot z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \cdot q_x^{2s_1} \right)^{v'} - \frac{1}{q_x} \cdot q_x^{v+1} \cdot \left(q_x^{-1} \cdot z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \cdot q_x^{2s_1} \right)^{v+1} \right] \\ & \cdot \left[1 + \sum_{1 \leq v'' \leq v} \left(1 - \frac{1}{q_x} \right) \cdot q_x^{v''} \cdot \left(q_x^{-1} \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \cdot q_x^{-2s_2} \right)^{v''} - \frac{1}{q_x} \cdot q_x^{v+1} \cdot \left(q_x^{-1} \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \cdot q_x^{-2s_2} \right)^{v+1} \right] \\ & = \left[1 + \sum_{1 \leq v' \leq v} \left(1 - \frac{1}{q_x} \right) \cdot \left(z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \cdot q_x^{2s_1} \right)^{v'} - \frac{1}{q_x} \cdot \left(z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \cdot q_x^{2s_1} \right)^{v+1} \right] \\ & \cdot \left[1 + \sum_{1 \leq v'' \leq v} \left(1 - \frac{1}{q_x} \right) \cdot \left(z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \cdot q_x^{-2s_2} \right)^{v''} - \frac{1}{q_x} \cdot \left(z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \cdot q_x^{-2s_2} \right)^{v+1} \right]. \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} T &= q_x^{-1-t-s_1+s_2}, \\ A_1 &= z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \cdot q_x^{2s_1}, \\ A_2 &= z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \cdot q_x^{-2s_2}, \end{aligned}$$

nous sommes amenés à calculer une somme de la forme du lemme suivant :

Lemme III.9. – *La série formelle*

$$\sum_{v \geq 0} T^v \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x} \cdot A_1^{v+1} + \left(1 - \frac{1}{q_x} \right) \cdot \sum_{1 \leq v' \leq v} A_1^{v'} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x} \cdot A_2^{v+1} + \left(1 - \frac{1}{q_x} \right) \cdot \sum_{1 \leq v'' \leq v} A_2^{v''} \right)$$

est égale à la fraction rationnelle

$$\frac{\left(1 - \frac{A_1}{q_x} \right) \cdot \left(1 - \frac{A_2}{q_x} \right) \cdot (1 - A_1 A_2 T^2)}{(1 - T) \cdot (1 - A_1 T) \cdot (1 - A_2 T) \cdot (1 - A_1 A_2 T)}.$$

Démonstration du Lemme III.9. Cette série s'écrit encore

$$\sum_{v \geq 0} T^v \cdot \left(1 - \frac{A_1}{q_x} \right) \cdot \left(\sum_{0 \leq v' \leq v} A_1^{v'} \right) \cdot \left(1 - \frac{A_2}{q_x} \right) \cdot \left(\sum_{0 \leq v'' \leq v} A_2^{v''} \right).$$

En mettant en facteur $\left(1 - \frac{A_1}{q_x} \right) \cdot \left(1 - \frac{A_2}{q_x} \right)$, on trouve :

$$\sum_{0 \leq v' \leq v'' \leq v} A_1^{v'} \cdot A_2^{v''} \cdot T^v + \sum_{0 \leq v'' \leq v' \leq v} A_2^{v''} \cdot A_1^{v'} \cdot T^v - \sum_{0 \leq v' \leq v} A_1^{v'} A_2^{v'} \cdot T^v.$$

Puis en mettant en facteur $\frac{1}{1-T}$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq v' \leq v''} A_1^{v'} \cdot (A_2 T)^{v''} + \sum_{0 \leq v'' \leq v'} A_2^{v''} (A_1 T)^{v'} - \sum_{0 \leq v'} (A_1 A_2 T)^{v'} \\ = & \frac{1}{1 - A_2 T} \cdot \frac{1}{1 - A_1 A_2 T} + \frac{1}{1 - A_1 T} \cdot \frac{1}{1 - A_1 A_2 T} - \frac{1}{1 - A_1 A_2 T} \\ = & \frac{(1 - A_1 T) + (1 - A_2 T) - (1 - A_1 T)(1 - A_2 T)}{(1 - A_1 T)(1 - A_2 T)(1 - A_1 A_2 T)} \\ = & \frac{1 - A_1 A_2 T^2}{(1 - A_1 T)(1 - A_2 T)(1 - A_1 A_2 T^2)}. \end{aligned}$$

Cela termine la démonstration du lemme. □

Suite de la démonstration du Théorème III.8. Il résulte du lemme ci-dessus qu'en les places $x \in |X|$ où $K_x = \text{GL}_2(O_x)$ et ψ_x est régulier, l'intégrale locale

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot |\mu|^{1+t+s_1-s_2} \cdot \int_{F_x \times F_x} du_1 \cdot du_2 \cdot \psi(\mu \cdot (u_1 - u_2)) \cdot \int_{K_{0,x}^G} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1}) \left(\begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}$$

est égale au produit de

$$S_x = \int_{K_{0,x}^G} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1)_x(k) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1})_x(k)}$$

et du facteur

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(1 - z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-1+2s_1}\right) \cdot \left(1 - z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-1-2s_2}\right) \cdot (1 - q_x^{-2-2t})}{(1 - q_x^{-1-t-s_1+s_2}) \cdot \left(1 - z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-1-t+s_1+s_2}\right) \cdot \left(1 - z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-1-t-s_1-s_2}\right) \cdot (1 - q_x^{-1-t+s_1-s_2})} \\
&= \frac{\zeta_{X,x}(1+t+s_1-s_2) \cdot L_x\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, 1+t-s_1-s_2\right) \cdot L_x\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, 1+t+s_1+s_2\right) \cdot \zeta_{X,x}(1+t-s_1+s_2)}{L_x\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, 1-2s_1\right) \cdot L_x\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, 1+2s_2\right) \cdot \zeta_{X,x}(2+2t)}.
\end{aligned}$$

Et en toutes les autres places, cette intégrale locale définit une fraction rationnelle qui n'a pas de pôle dans la zone

$$\operatorname{Re}(t + s_1 - s_2) > -1, \operatorname{Re}(t - s_1 - s_2) > -1, \operatorname{Re}(t + s_1 + s_2) > -1, \operatorname{Re}(t - s_1 + s_2) > -1.$$

(Voici une indication heuristique pour se repérer : La zone ainsi déterminée est celle où les séries qui définissent les différents facteurs de la formule ci-dessus convergent absolument. Or la zone de convergence absolue n'est pas moins grande en les autres places – où il peut y avoir de la ramification – et il n'y a pas de pôles dans cette zone.)

Cela termine la preuve de la partie (i).

(ii) D'après le Lemme III.7, notre intégrale s'écrit encore

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{A}^\times} d\mu \cdot |\mu|^{1+t-s_1+s_2} \cdot \int_{\mathbb{A} \times \mathbb{A}} du_1 \cdot du_2 \cdot \psi(\mu \cdot (u_1 - u_2)) \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot \\
& (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1}) \left(\begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}.
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\prod_{x \in |X|} \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot |\mu_x| \cdot d\mu_x$$

est la mesure de Haar sur $\prod_{x \in |X|} F_x = \mathbb{A}$ qui attribue le volume 1 à $O_{\mathbb{A}}$. Elle est égale à la mesure auto-duale de \mathbb{A} multipliée par la constante q^{g_X-1} .

Donc le résidu de notre intégrale en le pôle simple $t - s_1 + s_2 = 0$ est égal à

$$q^{g_X-1} \cdot \frac{\operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})}{q^{g_X-1}} \cdot \int_{\mathbb{A}} du \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1}) \left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}.$$

Ceci amène à considérer les intégrales locales

$$\int_{\operatorname{GL}_2(O_x)} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1)_x \left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1})_x \left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}$$

en fonction de $u \in F_x$.

Elles sont égales au produit de

$$\int_{\operatorname{GL}_2(O_x)} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1)_x(k) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1})_x(k)}$$

et du facteur

$$\left(q_x^{-1} \cdot z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \cdot q_x^{2s_1} \right)^{\max\{0, -v_x(u)\}} \cdot \left(q_x^{-1} \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \cdot q_x^{-2s_2} \right)^{\max\{0, -v_x(u)\}}.$$

Par conséquent, l'intégrale globale

$$q^{g_X-1} \cdot \int_{\mathbb{A}} du \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1}) \left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}$$

est égale au produit de

$$\int_{K_0^G} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1) \cdot \lambda_1)(k) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2^{-1})(k)}$$

et du facteur global

$$\begin{aligned} \prod_{x \in |X|} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{q_x} \right) \cdot \sum_{v \geq 1} q_x^v \cdot (q_x^{-2+2s_1-2s_2})^v \right] &= \prod_{x \in |X|} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{q_x} \right) \cdot \frac{q_x^{-1+2s_1-2s_2}}{1 - q_x^{-1+2s_1-2s_2}} \right]^2 \\ &= \prod_{x \in |X|} \left[\frac{1 - q_x^{-2+2s_1-2s_2}}{1 - q_x^{-1+2s_1-2s_2}} \right] = \frac{\zeta_X(1 - 2s_1 + 2s_2)}{\zeta_X(2 - 2s_1 + 2s_2)}. \end{aligned}$$

Cela prouve la partie (ii) du théorème.

(iii) Nous voulons maintenant calculer le résidu en le pôle simple $t - s_1 + s_2 = 0$ de l'intégrale de l'énoncé.

On connaît l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein

$$E_P^G(\varphi, \lambda_P)(g) = E_P^G(M_P^P(\varphi, \lambda_P), \lambda_P^{\text{op}})(g)$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$WE_P^G(\varphi, \lambda_P)(g) = WE_P^G(M_P^P(\varphi, \lambda_P), \lambda_P^{\text{op}})(g).$$

Donc notre fonction analytique s'écrit encore

$$\int_{K_0^G} dk \cdot \int_{\mathbb{A}^\times} d\mu \cdot |\mu|^t \cdot WE_P^G(M_P^P(h(\varphi, \lambda_1), \lambda_1), \lambda_1^{\text{op}}) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{WE_P^G(M_P^P(\varphi, \bar{\lambda}_2^{-1}), \bar{\lambda}_2^{\text{op}-1}) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}$$

puis, d'après le Lemme III.7,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{A}^\times} d\mu \cdot |\mu|^{1+t-s_1+s_2} \cdot \int_{\mathbb{A} \times \mathbb{A}} du_1 \cdot du_2 \cdot \psi(\mu \cdot (u_1 - u_2)) \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot \\ &(M_P^P(h(\varphi, \lambda_1), \lambda_1) \cdot \lambda_1^{\text{op}}) \left(\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{(M_P^P(h(\varphi, \bar{\lambda}_2^{-1}), \bar{\lambda}_2^{\text{op}-1}) \left(\begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right))}. \end{aligned}$$

On conclut alors comme dans la démonstration de la partie (ii).

(iv) On procède comme dans la démonstration des parties (iii) et (ii) mais en appliquant cette fois l'opérateur d'entrelacement M_P^P et l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein à seulement un des deux foncteurs. \square

4 Le cas $G = \text{GL}_2$: déplacement des contours d'intégration

Nous allons démontrer comme conséquence du Théorème III.8 :

Théorème III.10. – Fixons le caractère automorphe $\pi = (\chi_1, \chi_2)$ de $M_P(\mathbb{A}) \backslash A_G$.

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ et tout polynôme en λ_P et λ_P^{-1}

$$\lambda_P \mapsto R(\lambda_P),$$

considérons l'expression

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot \int_{\mathbb{A}^\times} d\mu \cdot \mathbf{1}(\deg(\mu) = -N) \cdot \\ WE_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{WE_P^G(\varphi, \lambda_P) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}.$$

(i) Si le caractère $\frac{\chi_1}{\chi_2}$ ne se factorise pas à travers $|\bullet|$, cette expression s'écrit comme la somme d'un "terme principal" égal à

$$\frac{1}{q^{2(g_X-1)} \cdot \text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G)} \cdot \left[N \cdot \frac{\zeta_X^{-1}(1)}{\zeta_X(2)} + 2 \left(\frac{\zeta_X(1)}{\zeta_X(2)} - \frac{\zeta_X^{-1}(1) \cdot \zeta_X'(2)}{\zeta_X(2)^2} \right) \right] \\ \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \text{Tr}(h, \text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P)) \\ + \frac{1}{q^{2(g_X-1)} \cdot \text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G)} \cdot \frac{\zeta_X^{-1}(1)}{2 \cdot \zeta_X(2)} \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \text{Tr}((M_P^P)^{-1} \circ (M_P^P)' \circ h, \text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P))$$

(où $\zeta_X^{-1}(1) = \frac{\text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})}{q^{(g_X-1)}}$ désigne le résidu de $\zeta_X(t)$ en $t = 1$ et $\zeta_X(1)$ son terme constant en $t = 1$) et d'un "terme complémentaire" de la forme

$$\int_{\text{Re } s_P = s_0} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \int_{\text{Re } t = t_0} dt \cdot q^{N(t-1)} \cdot \frac{\zeta_X(t)^2}{\zeta_X(2t)} \cdot \frac{L\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, t + 2s_P\right)}{L\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, 1 + 2s_P\right)} \cdot \frac{L\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, t - 2s_P\right)}{L\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, 1 - 2s_P\right)} \cdot R(t, s_P)$$

où :

- les caractères $\lambda_P \in \Lambda_P$ sont de la forme $(|\bullet|^{s_P}, |\bullet|^{-s_P})$,
- $R(t, s_P)$ est une fraction rationnelle en les variables q^{-t} et q^{-s_P} qui n'a pas de pôle dans la zone

$$\text{Re}(t) > 0, \text{Re}(t - 2s_P) > 0, \text{Re}(t + 2s_P) > 0, -\frac{1}{2} < \text{Re}(s_P) < \frac{1}{2},$$

- on prend $\frac{1}{2} < t_0 < 1 - 2\varepsilon$ et $-\varepsilon < s_0 < \varepsilon$ (si bien que $0 < t_0 + 2s_0 < 1$ et $0 < t_0 - 2s_0 < 1$), avec ε assez petit pour que les fonctions $L\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, \bullet\right)$ et $L\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, \bullet\right)$ ne s'annulent pas dans la zone $\text{Re}(\bullet) > 1 - 2\varepsilon$.

(ii) Si $\chi_1 = \chi_2$, cette expression s'écrit comme la somme d'un "terme principal" et d'un "terme complémentaire" comme ci-dessus, plus un "troisième terme" qui s'écrit

$$\frac{1}{(q^{g_X-1})^2 \cdot \text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G)} \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \left[q^{2N s_P} \cdot \frac{\zeta_X(1 + 4s_P)}{\zeta_X(2 + 4s_P)} + q^{-2N s_P} \cdot \frac{\zeta_X(1 - 4s_P)}{\zeta_X(2 - 4s_P)} \right] \\ \cdot \text{Tr}((\bullet \lambda_P^2) \circ M_P^P \circ h, \text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P)).$$

Démonstration. Si $t_0 \in \mathbb{R}$ avec $t_0 \gg 0$, l'expression de l'énoncé est égale à

$$\int_{\text{Re } t = t_0} dt \cdot q^{NT} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot \int_{\mathbb{A}^\times} d\mu \cdot |\mu|^t \cdot \\ WE_P^G(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{WE_P^G(\varphi, \bar{\lambda}_P^{-1}) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}.$$

En posant $\lambda_1 = (|\bullet|^{s_1}, |\bullet|^{-s_1})$ et $\lambda_2 = (|\bullet|^{s_2}, |\bullet|^{-s_2})$, c'est aussi la limite quand s_1, s_2 tendent vers 0 de

$$\int_{\operatorname{Re}(t)=t_0} dt \cdot q^{NT} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\operatorname{Im} \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot \int_{\mathbb{A}^\times} d\mu \cdot |\mu|^t \cdot \\ WE_P^G(h(\varphi, \lambda_P \lambda_1), \lambda_P \lambda_1) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right) \cdot \overline{WE_P^G(\varphi, \bar{\lambda}_P \bar{\lambda}_2^{-1}) \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)}.$$

Supposons d'abord que le caractère quotient $\frac{\chi_1}{\chi_2}$ ne se factorise pas à travers $|\bullet| = q^{\deg(\bullet)}$. Alors les deux fonctions $L\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, \bullet\right)$ et $L\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, \bullet\right)$ n'ont pas de pôle.

D'après le Théorème III.8(i), si on déplace les contours d'intégration jusqu'à $\operatorname{Re} t = t_0$ et $\operatorname{Re} s = s_0$ avec $\frac{1}{2} < t_0 < 1 - 2\varepsilon$, $-\varepsilon < s_0 < \varepsilon$, et ε comme dans l'énoncé, on obtient le "terme complémentaire" annoncé en faisant tendre s_1, s_2 vers 0.

De plus, ce déplacement de contours a fait apparaître les résidus des parties (ii) et (iii) du Théorème III.8, et en faisant tendre s_1, s_2 vers 0, on obtient :

$$\frac{\operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})}{q^{gX-1}} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\operatorname{Im} \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot \lim_{s_1, s_2 \rightarrow 0} \\ \left[q^{N(s_2-s_1)} \cdot \frac{\zeta_X(1+2s_2-2s_1)}{\zeta_X(2+2s_2-2s_1)} \cdot (h(\varphi, \lambda_1 \lambda_P) \cdot \lambda_1 \lambda_P)(k) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_P^{-1})(k)} \right. \\ \left. + q^{N(s_1-s_2)} \cdot \frac{\zeta_X(1+2s_1-2s_2)}{\zeta_X(2+2s_1-2s_2)} \cdot M_P^P(h(\varphi, \lambda_1 \lambda_P), \lambda_1 \lambda_P) \cdot (\lambda_1 \lambda_P)^{\operatorname{op}}(k) \cdot \overline{(M_P^P(\varphi, \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_P^{-1}) \cdot \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_P^{-\operatorname{op}})(k)} \right].$$

Or on a les développements

$$\zeta_X(1+2s_2-2s_1) = \frac{\zeta_X^{-1}(1)}{2 \cdot \log(q) \cdot (s_2 - s_1)} + \zeta_X(1) + 0(s_2 - s_1), \\ \frac{1}{\zeta_X(2+2s_2-2s_1)} = \frac{1}{\zeta_X(2)} - 2 \cdot \frac{\zeta_X'(2)}{\zeta_X(2)^2} \cdot \log(q) \cdot (s_2 - s_1) + 0(s_2 - s_1),$$

d'où

$$\frac{\zeta_X(1+2s_2-2s_1)}{\zeta_X(2+2s_2-2s_1)} = \frac{\zeta_X^{-1}(1)/2 \zeta_X(2)}{\log(q) \cdot (s_2 - s_1)} + \left(\frac{\zeta_X(1)}{\zeta_X(2)} - \frac{\zeta_X^{-1}(1) \cdot \zeta_X'(2)}{\zeta_X(2)^2} \right) + 0(s_2 - s_1).$$

On a aussi

$$q^{N(s_2-s_1)} = 1 + N \cdot \log(q) \cdot (s_2 - s_1) + 0((s_2 - s_1)^2).$$

Enfin, on a

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\operatorname{Im} \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot h(\varphi, \lambda_P)(k) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_P^{-1})(k)} \\ = \frac{1}{q^{gX-1} \cdot \operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G) \cdot \operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})} \cdot \int_{\operatorname{Im} \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \operatorname{Tr}(h, \operatorname{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P)), \\ \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\operatorname{Im} \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot (M_P^P(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P) \cdot \lambda_P^{\operatorname{op}})(k) \cdot \overline{(M_P^P(\varphi, \bar{\lambda}_P^{-1}) \cdot \bar{\lambda}_P^{-\operatorname{op}})(k)} \\ = \frac{1}{q^{gX-1} \cdot \operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G) \cdot \operatorname{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})} \cdot \int_{\operatorname{Im} \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \operatorname{Tr}(h, \operatorname{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P))$$

et

$$\begin{aligned}
& \lim_{s_1, s_2 \rightarrow 0} \left[\sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \frac{1}{s_2 - s_1} \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_1 \lambda_P) \cdot \lambda_1 \lambda_P)(k) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2 \lambda_P^{-1})(k)} \right. \\
& - \left. \frac{1}{s_2 - s_1} \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot (M_P^P(h(\varphi, \lambda_1 \lambda_P), \lambda_1 \lambda_P) \cdot (\lambda_1 \lambda_P)^{\text{op}}(k) \cdot \overline{(M_P^P(\varphi, \bar{\lambda}_2 \lambda_P^{-1}) \cdot \bar{\lambda}_2 \lambda_P^{-\text{op}})(k)}) \right] \\
& = \frac{\log(q)}{q^{g_X-1} \cdot \text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G) \cdot \text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})} \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot \text{Tr}((M_P^P)^{-1} \circ (M_P^P)' \circ h, \text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P)).
\end{aligned}$$

On en déduit la partie (i) du théorème.

Supposons maintenant que $\chi_1 = \chi_2$.

Par déplacement des contours d'intégration, on obtient un "terme complémentaire" et un "terme principal" qui ont exactement la même forme que précédemment.

Mais on obtient en plus deux résidus supplémentaires qui sont donnés par la partie (iv) du Théorème III.8. Ils donnent naissance à un "troisième terme" qui est

$$\begin{aligned}
& \frac{\text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})}{q^{g_X-1}} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \int_{K_0^G} dk \cdot \\
& \lim_{s_1, s_2 \rightarrow 0} \left[q^{N(2s_P+s_1+s_2)} \cdot \frac{\zeta_X(1+4s_P+2s_1+2s_2)}{\zeta_X(2+4s_P+2s_1+2s_2)} \cdot M_P^P(h(\varphi, \lambda_1 \lambda_P), \lambda_1 \lambda_P) \cdot (\lambda_1 \lambda_P)^{\text{op}}(k) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_2 \lambda_P^{-1})(k)} \right. \\
& + \left. q^{-N(2s_P+s_1+s_2)} \cdot \frac{\zeta_X(1-4s_P-2s_1-2s_2)}{\zeta_X(2-4s_P-2s_1-2s_2)} \cdot (h(\varphi, \lambda_1 \lambda_P) \cdot \lambda_1 \lambda_P)(k) \cdot \overline{(M_P^P(\varphi, \bar{\lambda}_2 \lambda_P^{-1}) \cdot \bar{\lambda}_2 \lambda_P^{-\text{op}})(k)} \right].
\end{aligned}$$

Enfin, on a pour tout $\lambda_P \in \text{Im } \Lambda_P$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{K_0^G} dk \cdot (M_P^P(h(\varphi, \lambda_P), \lambda_P) \cdot \lambda_P^{\text{op}}(k) \cdot \overline{(\varphi \cdot \bar{\lambda}_P^{-1})(k)}) \\
& = \frac{1}{q^{g_X-1} \cdot \text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G) \cdot \text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})} \cdot \text{Tr}((\bullet \lambda_P^2) \circ M_P^P \circ h, \text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P)) \\
& = \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(P, \pi)} \int_{K_0^G} dk \cdot (h(\varphi, \lambda_P) \cdot \lambda_P)(k) \cdot \overline{(M_P^P(\varphi, \bar{\lambda}_P^{-1}) \cdot \bar{\lambda}_P^{-\text{op}})(k)}
\end{aligned}$$

si bien qu'on obtient un "troisième terme" égal à

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(q^{g_X-1})^2 \cdot \text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G)} \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \left[q^{2N_{s_P}} \cdot \frac{\zeta_X(1+4s_P)}{\zeta_X(2+4s_P)} + q^{-2N_{s_P}} \cdot \frac{\zeta_X(1-4s_P)}{\zeta_X(2-4s_P)} \right] \\
& \cdot \text{Tr}((\bullet \lambda_P^2) \circ M_P^P \circ h, \text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P))
\end{aligned}$$

comme on voulait. \square

On rappelle qu'on a fixé un sous-groupe ouvert $K = \prod_{x \in |X|} K_x$ de K_0^G , une partie finie S_0 de $|X|$ telle que

$K_x = K_{0,x}^G$ en toute place $x \notin S_0$, et une autre partie finie $S \subset |X| - S_0$.

Par combinaison avec le Lemme III.6, on obtient :

Corollaire III.11. – *Fixons un caractère automorphe $\pi = (\chi_1, \chi_2)$ de $M_P(\mathbb{A})/A_G$ et une fonction de Hecke $h \in \mathcal{H}_K^G/A_G$.*

Alors pour toute fonction sphérique

$$\Delta_S \in \bigotimes_{x \in S} \mathcal{H}_{x, \phi}^G$$

dont la transformée de Satake évaluée sur les paramètres de Hecke des induites

$$\text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P), \quad \lambda_P \in \Lambda_P,$$

est égale à un polynôme

$$R(\lambda_P) \text{ en } \lambda_P \text{ et } \lambda_P^{-1},$$

et pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, l'expression

$$\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G) \cdot \text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N} \Lambda_1 \Lambda_2 K_{h^* \Delta_S}^{F, \pi}(g, g)$$

se décompose suivant les cas de la manière suivante :

(i) Lorsque $\frac{\chi_1}{\chi_2}$ ne se factorise pas par $|\bullet| = q^{-\deg(\bullet)}$, c'est la somme d'un "terme principal" égal à

$$\begin{aligned} & \left[N + 2 \cdot \left(\frac{\zeta_X(1)}{\zeta_X^{-1}(1)} - \frac{\zeta_X'(2)}{\zeta_X(2)} \right) \right] \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \text{Tr}(h, \text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P)) \\ & + \frac{1}{2} \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \text{Tr}((M_P^P)^{-1} \circ (M_P^P)' \circ h, \text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P)) \end{aligned}$$

et d'un "terme complémentaire" de la forme précisée par le Théorème III.10.

(ii) Lorsque $\chi_1 = \chi_2$, c'est la somme de :

- un "terme principal" comme ci-dessus mais multiplié par $\frac{1}{2}$,
- un "terme complémentaire" de la forme précisée par le Théorème III.10,
- un "troisième terme" égal à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(\lambda_P) \cdot \left[q^{2N_{sP}} \cdot \frac{\zeta_X(1+4s_P)/\zeta_X^{-1}(1)}{\zeta_X(2+4s_P)/\zeta_X(2)} + q^{-2N_{sP}} \cdot \frac{\zeta_X(1-4s_P)/\zeta_X^{-1}(1)}{\zeta_X(2-4s_P)/\zeta_X(2)} \right] \\ & \cdot \text{Tr}((\bullet \lambda_P^2) \circ M_P^P \circ h, \text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P)). \end{aligned}$$

Démonstration. Cela résulte du Théorème III.10 et du Lemme III.6 puisque :

- On a $|\text{Fixe}(\pi)| = 1$ ou 2 suivant qu'on se trouve dans la situation de (i) ou dans celle de (ii).
- D'après le Lemme II.10(ii), on a les formules de volume

$$\begin{aligned} \text{vol}(\text{GL}_2(F) \backslash \text{GL}_2(\mathbb{A}) / A_G) &= \text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G) \cdot \zeta_X(2) \cdot q^{3(g_X-1)}, \\ \text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0}) &= q^{g_X-1} \cdot \zeta_X^{-1}(1), \end{aligned}$$

d'où on tire

$$\frac{\zeta_X^{-1}(1)}{\zeta_X(2)} = \frac{\text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / A_G) \cdot \text{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0})}{\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G)} \cdot q^{2(g_X-1)}.$$

□

5 Le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2 via une extension quadratique E de F , avec donc

$$G = \text{Res}_{E/F} GL_1, \quad H = GL_2.$$

On considère un sous-groupe ouvert $K = \prod_{x \in |X|} K_x$ de K_0^G , une partie finie S_0 de $|X|$ en dehors de laquelle E est non ramifié sur F et $K_x = K_{0,x}^G$, puis un sous-groupe ouvert $K' = \prod_{x \in |X|} K'_x$ de K_0^H tel que $K'_x = K_{0,x}^H$, $\forall x \notin S_0$, et que, en chaque place $x \in S_0$, K'_x soit assez petit en fonction de K_x et de la ramification de E .

Enfin, on choisit une partie finie $S \subset |X| - S_0$ assez grande pour vérifier les conclusions du Lemme II.2.

On choisit en chaque place $x \in S$ une série formelle

$$\Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z)$$

qui vérifie les conditions du Lemme II.3, et on note

$$\Delta_S^{G,H} = \bigotimes_{x \in S} \Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z)$$

l'élément correspondant dans le centre de

$$(\mathcal{H}_K^G \otimes \mathcal{H}_{K'}^H)[[Z]].$$

Puis on considère deux fonctions de Hecke $h \in \mathcal{H}_K^G$ et $h' \in \mathcal{H}_{K'}^H$.

Nous allons chercher une limite quand $Z \mapsto 1$ et $Z_1 \mapsto 1$ pour

$$(1 - Z_1) \cdot \sum_{N \in \mathbb{N}} Z_1^N \cdot \text{vol}(H(F) \backslash H(\mathbb{A}) / A_H) \cdot \text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N} \int_{E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / A_G} dt \cdot [K^G(t, t) \times \Lambda_1 \Lambda_2 K^{H, \text{Eis}}(g, g)]((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z)).$$

En fait, une telle limite n'existe pas, mais nous allons voir que si on impose

$$(1 - Z_1) = c \cdot (1 - Z)$$

et qu'on fait tendre $Z_1 \mapsto 1$, $Z \mapsto 1$, alors il y a une limite, qui dépend de la constante c .

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme III.12. – *On considère une expression de la forme*

$$\int_{|\lambda|=1} d\lambda \cdot \Delta(Z, \lambda) \cdot R(\lambda)$$

où

- $R(\lambda)$ est une fraction rationnelle en λ qui n'a pas de pôle sur le cercle $|\lambda| = 1$,
- $\Delta(Z, \lambda)$ est une fraction rationnelle en Z et λ qui est un produit de puissances positives ou négatives de facteurs de la forme

$$1 - Z^d \cdot \alpha \cdot \lambda^{d'}$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, $|\alpha| = 1$ et $d \geq 1$, $d' \in \mathbb{Z}$.

On suppose que pour toute spécialisation de λ dans \mathbb{C}^\times , la fraction rationnelle $\Delta(Z, \lambda)$ est bien définie en $Z = 1$ et y vaut 0, sauf pour un ensemble fini Λ_0 de $\lambda_0 \in \mathbb{C}^\times$ où elle vaut 1.

Alors on peut conclure :

(i) L'expression (définie a priori comme somme d'une série entière absolument convergente pour $|Z| < 1$)

$$\int_{|\lambda|=1} d\lambda \cdot \Delta(Z, \lambda) \cdot R(\lambda)$$

est une fraction rationnelle en Z .

(ii) En le point $Z = 1$, elle est bien définie et s'annule à l'ordre 1 au moins.

(iii) On a

$$\lim_{Z \rightarrow 1} \frac{1}{1-Z} \cdot \int_{|\lambda|=1} d\lambda \cdot \Delta(Z, \lambda) \cdot R(\lambda) = \sum_{\lambda_0 \in \Lambda_0} c(\Delta, \lambda_0) \cdot R(\lambda_0)$$

où, pour chaque $\lambda_0 \in \Lambda_0$, $c(\Delta, \lambda_0)$ ne dépend que de la famille des multiplicités dans $\Delta(Z, \lambda)$ des facteurs

$$(1 - Z^d \cdot \lambda_0^{-d'} \cdot \lambda^{d'}), \quad d \geq 1, \quad d' \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Quitte à remplacer Z par une puissance de Z d'exposant suffisamment divisible, on peut supposer que tous les facteurs du dénominateur et du numérateur de $\Delta(Z, \lambda)$ sont de la forme

$$\left(1 - Z^d \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0}\right), \quad \left(1 - Z^d \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda}\right), \quad (1 - Z^d \cdot \alpha_0)$$

avec $d \geq 1$ et $|\lambda_0| = 1$ ou $|\alpha_0| = 1$, si bien que $\Delta(Z, \lambda)$ s'écrit

$$\frac{\prod_{(\alpha_0, d)} (1 - Z^d \cdot \alpha_0)^{m(\alpha_0, d)}}{\prod_{(\lambda_0, d)} \left(1 - Z^d \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{n(\lambda_0, d)} \cdot \left(1 - Z^d \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{n'(\lambda_0, d)}}.$$

Ici, les $m(\alpha_0, d)$, $n(\lambda_0, d)$ et $n'(\lambda_0, d)$ sont des familles presque nulles d'éléments de \mathbb{Z} qui vérifient nécessairement

$$\sum_{d \geq 1} m(1, d) \geq 1$$

et

$$\sum_{d \geq 1} m(1, d) \geq \sum_{d \geq 1} (n(\lambda_0, d) + n'(\lambda_0, d))$$

pour tout λ_0 , l'égalité étant vérifiée si et seulement si $\lambda_0 \in \Lambda_0$.

Considérons Z comme une variable dans \mathbb{C} telle que $|Z| < 1$. Et calculons l'intégrale

$$\int_{|\lambda|=1} d\lambda \cdot \Delta(Z, \lambda) \cdot R(\lambda)$$

par déplacement du contour d'intégration vers $|\lambda| \rightarrow 0$.

Les pôles μ de $R(\lambda)$ tels que $0 < |\mu| < 1$ font apparaître des fractions rationnelles en Z dont les facteurs du numérateur ou du dénominateur s'annulant en $Z = 1$ sont les

$$\prod_d (1 - Z^d)^{m(1, d)}.$$

Le pôle en $|\lambda| = 0$ fait apparaître une fraction rationnelle en Z dont le dénominateur est une puissance de Z .

Enfin, il reste à examiner la contribution des pôles de la forme

$$\lambda = \lambda_0 \cdot Z^d \text{ avec } |\lambda_0| = 1, \quad d \geq 1 \text{ et } n(\lambda_0, d) \geq 1.$$

C'est le résidu en $\lambda = \lambda_0 \cdot Z^d$ de l'expression

$$\frac{1}{(\lambda - \lambda_0 \cdot Z^d)^{n(\lambda_0, d)}} \cdot \left[\frac{\lambda^{n(\lambda_0, d)}}{\left(1 - Z^d \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{n'(\lambda_0, d)}} \cdot \frac{\prod_{(\alpha_0, d')} (1 - Z^{d'} \cdot \alpha_0)^{m(\alpha_0, d')}}{\prod_{(\lambda'_0, d') \neq (\lambda_0, d)} \left(1 - Z^{d'} \cdot \frac{\lambda'_0}{\lambda}\right)^{n(\lambda'_0, d')} \left(1 - Z^{d'} \cdot \frac{\lambda}{\lambda'_0}\right)^{n'(\lambda'_0, d')}}} R(\lambda) \right]$$

qui est égal à la dérivée

$$\frac{1}{(n(\lambda_0, d) - 1)!} \cdot \frac{\partial^{n(\lambda_0, d) - 1}}{\partial \lambda^{n(\lambda_0, d) - 1}} \left[\frac{\lambda^{n(\lambda_0, d)}}{\left(1 - Z^d \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{n'(\lambda_0, d)}} \cdot \frac{\prod_{(\alpha_0, d')} (1 - Z^{d'} \cdot \alpha_0)^{m(\alpha_0, d')}}{\prod_{(\lambda'_0, d') \neq (\lambda_0, d)} \left(1 - Z^{d'} \cdot \frac{\lambda'_0}{\lambda}\right)^{n(\lambda'_0, d')} \cdot \left(1 - Z^{d'} \cdot \frac{\lambda}{\lambda'_0}\right)^{n'(\lambda'_0, d')}}} \cdot R(\lambda) \right]$$

évaluée en $\lambda = \lambda_0 \cdot Z^d$.

Si on fait porter toutes les $n(\lambda_0, d) - 1$ dérivations exclusivement sur les facteurs

$$\left(1 - Z^d \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0}\right), \quad \left(1 - Z^{d'} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) \text{ et } \left(1 - Z^{d'} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0}\right),$$

on obtient une fraction rationnelle en Z dont l'ordre d'annulation en $Z = 1$ est

$$\left(\sum_{d' \geq 1} m(1, d')\right) - \left(\sum_{d' \geq 1} (n(\lambda_0, d') + n'(\lambda_0, d'))\right) + 1,$$

et si on fait porter au moins certaines des dérivations sur les autres facteurs, on obtient une fraction rationnelle en Z dont l'ordre d'annulation en $Z = 1$ est strictement supérieur.

On en déduit l'énoncé du lemme. □

Nous pouvons montrer maintenant :

Théorème III.13. – *On se place dans les conditions du début de ce paragraphe.*

Alors la série formelle

$$(1 - Z_1) \cdot \sum_{N \in \mathbb{N}} Z_1^N \cdot \text{vol}(H(F) \backslash H(\mathbb{A}) / A_H) \cdot \text{Moyenne} \int_{\deg_Q(g) = N} \int_{E \times \backslash \mathbb{A}_E^\times / A_G} dt \cdot [K^G(t, t) \times \Lambda_1 \Lambda_2 K^H(g, g)] ((h \otimes h') * \Delta_S^{G, H}(Z))$$

est une fraction rationnelle en Z_1 et Z .

Si on pose la condition

$$(1 - Z_1) = c \cdot (1 - Z)$$

pour une certaine constante non nulle c , on obtient une fraction rationnelle en Z qui est bien définie en $Z = 1$. Elle y vaut

$$\sum_{\substack{\chi \in \Pi_{\text{aut}}(G/A_G) \\ \pi \in \Pi_{\text{cusp}}(H/A_H) \\ \pi = \rho_* \chi}} \text{Tr}_\chi(h) \cdot \text{Tr}_\pi(h') + \frac{c(\Delta_S^{G,H})}{c} \cdot \sum_{\substack{\chi \in \Pi_{\text{aut}}(G/A_G) \\ \pi \in \Pi_{\text{Eis}}(H/A_H) \\ \pi = \rho_* \chi}} \text{Tr}_\chi(h) \cdot \text{Tr}_\pi(h')$$

où $c(\Delta_S^{G,H})$ est une constante qui ne dépend que du choix de la fraction rationnelle $\Delta_S^{G,H} = \bigotimes_{x \in S} \Delta_x^{G,H}$ vérifiant les conditions du Lemme II.3.

Démonstration. On a les décompositions

$$K_h^G = \sum_{\chi \in \Pi_{\text{aut},K}(G/A_G)} K_h^{G,\chi}$$

et

$$\Lambda_1 \Lambda_2 K_{h'}^H = \sum_{\pi \in \Pi_{\text{cusp},K'}(H/A_H)} K_{h'}^{H,\pi} + \sum_{\substack{(P,\pi) \\ P \subsetneq H}} \Lambda_1 \Lambda_2 K_{h'}^{(P,\pi)}$$

où (P, π) décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires discrètes telles que $P \subsetneq H$ et que $\pi^{K'} \neq 0$.

Pour $\chi \in \Pi_{\text{aut},K}(G/A_G)$ et $\pi \in \Pi_{\text{cusp},K'}(H/A_H)$, la série formelle en Z_1 et Z

$$(1 - Z_1) \cdot \sum_{N \in \mathbb{N}} Z_1^N \cdot \text{vol}(H(F) \backslash H(\mathbb{A})/A_H) \cdot \text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N} \int_{E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / A_G} dt \cdot [K^{G,\chi}(t, t) \times K^{H,\pi}(g, g)]((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z))$$

est égale au produit des trois facteurs

$$\prod_{x \in S} \Delta_x^{G,H}(z(\chi_x), z(\pi_x), Z),$$

$$\int_{E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / A_G} dt \cdot K_h^{G,\chi}(t, t) = \text{Tr}_\chi(h),$$

$$(1 - Z_1) \cdot \sum_{N \in \mathbb{N}} Z_1^N \cdot \text{vol}(H(F) \backslash H(\mathbb{A})/A_H) \cdot \text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N} K_{h'}^{H,\pi}(g, g).$$

C'est donc le produit d'une fraction rationnelle en Z bien définie en $Z = 1$ et d'une fraction rationnelle en Z_1 bien définie en $Z_1 = 1$. Sa valeur en $Z = 1$ et $Z_1 = 1$ est

$$\begin{cases} \text{Tr}_\chi(h) \cdot \text{Tr}_\pi(h') & \text{si } \pi = \rho_* \chi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons maintenant un caractère $\chi \in \Pi_{\text{aut},K}(G/A_G)$ et un représentant (P, π) d'une classe de paires discrètes tel que $P \subsetneq H$ et que $\pi^{K'} \neq 0$. Il n'y a pas de restriction à supposer que $P = B^{\text{op}}$, si bien que π est un caractère automorphe de $M_P = \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ qu'on peut noter (χ_1, χ_2) .

Nous nous intéressons à la série formelle

$$(1 - Z_1) \cdot \sum_{N \in \mathbb{N}} Z_1^N \cdot \text{vol}(H(F) \backslash H(\mathbb{A})/A_H) \cdot \text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N} \int_{E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / A_G} dt \cdot [K^{G,\chi}(t, t) \times \Lambda_1 \Lambda_2 K^{(P,\pi)}(g, g)]((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z)).$$

D'après le Corollaire III.11, elle se décompose naturellement en la somme d'un "terme principal" et d'un "terme complémentaire", plus un "troisième terme" dans le cas où $\frac{\chi_2}{\chi_1}$ se factorise à travers $|\bullet| = q^{\deg(\bullet)}$.

Le "terme complémentaire" est de la forme

$$\int_{\text{Im } \lambda_P} d\lambda_P \cdot R(Z, \lambda_P) \cdot \int_{\text{Re } t=t_0} dt \cdot \frac{1-Z_1}{1-Z_1 \cdot q^{t-1}} \cdot \frac{\zeta_X(t)^2}{\zeta_X(2t)} \cdot \frac{L\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, t+2s_P\right)}{L\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, 1+2s_P\right)} \cdot \frac{L\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, t-2s_P\right)}{L\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, 1-2s_P\right)} \cdot R(t, s_P)$$

avec les mêmes conditions que dans l'énoncé du Théorème III.10(i) sur la fraction rationnelle $R(t, s_P)$ et

- t_0 est dans la zone $\frac{1}{2} < t_0 < 1$,
- $R(Z, \lambda_P)$ est la fraction rationnelle déduite de $\prod_{x \in |X|} \Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z)$ en prenant pour valeurs propres de Hecke celles de χ et de $\pi \otimes \lambda_P$.

On voit d'abord que l'intégrale

$$\int_{\text{Re } t=t_0} dt \cdot \frac{1}{1-Z_1 \cdot q^{t-1}} \cdot \frac{\zeta_X(t)^2}{\zeta_X(2t)} \cdot \frac{L\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, t+2s_P\right)}{L\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, 1+2s_P\right)} \cdot \frac{L\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, t-2s_P\right)}{L\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}, 1-2s_P\right)} \cdot R(t, s_P)$$

est une fraction rationnelle en Z_1 et λ_P dont les pôles ne rencontrent pas $\{Z_1 = 1\} \times \text{Im } \Lambda_P$.

On déduit alors du Lemme III.12 que notre "terme complémentaire" est une fraction rationnelle en Z et Z_1 dont le quotient par $\frac{1}{1-Z_1}$ est bien défini en $Z = 1, Z_1 = 1$. Donc ce "terme complémentaire" est bien défini en $Z = 1, Z_1 = 1$ et s'y annule.

Voyons maintenant le "terme principal". Il est égal à

$$\frac{1}{|\text{Fixe}(\pi)|} \cdot \left[\frac{Z_1}{1-Z_1} + 2 \left(\frac{\zeta_X(1)}{\zeta_X^{-1}(1)} - \frac{\zeta_X'(2)}{\zeta_X(2)} \right) \right] \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(Z, \lambda_P) \cdot \text{Tr}_\chi(h) \cdot \text{Tr}(h', \text{Ind}_P^H(\pi \otimes \lambda_P)) \\ + \frac{1}{2|\text{Fixe}(\pi)|} \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(Z, \lambda_P) \cdot \text{Tr}_\chi(h) \cdot \text{Tr}((M_P^P)^{-1} \circ (M_P^P)' \circ h, \text{Ind}_P^H(\pi \otimes \lambda_P)).$$

De plus, la fraction rationnelle

$$R(Z, \lambda_P)$$

est toujours bien définie en $Z = 1$ dès qu'on fixe λ_P et elle y vaut suivant les cas

$$\begin{cases} 1 & \text{si } \chi \text{ se factorise à travers } \text{Nm} : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times \rightarrow F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \text{ en deux caractères distincts de } F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \\ & \text{qui sont les 2 composantes de } \pi \otimes \lambda_P, \text{ ce qui signifie } \text{Ind}_P^H(\pi \otimes \lambda_P) = \rho_* \chi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On déduit du Lemme III.12 que si on pose

$$(1 - Z_1) = c \cdot (1 - Z),$$

notre fraction rationnelle devient bien définie en $Z = 1$ et y vaut

$$\frac{c(\Delta_S^{G,H})}{c} \cdot \frac{1}{|\text{Fixe}(\pi)|} \cdot \sum_{\substack{\lambda_P \in \text{Im } \Lambda_P \\ \text{Ind}_P^H(\pi \otimes \lambda_P) = \rho_* \chi}} \text{Tr}_\chi(h) \cdot \text{Tr}(h', \text{Ind}_P^H(\pi \otimes \lambda_P)).$$

On remarque que si l'ensemble $\{\lambda_P \in \text{Im } \Lambda_P \mid \text{Ind}_P^H(\pi \otimes \lambda_P) = \rho_* \chi\}$ est non vide, il compte un ou deux éléments suivant que $|\text{Fixe}(x)| = 1$ ou 2.

Enfin, dans le cas où $\frac{\chi_1}{\chi_2}$ se factorise à travers $|\bullet| = q^{\deg(\bullet)}$, il reste à examiner le “troisième terme”. On peut supposer que $\chi_1 = \chi_2$ et il s’écrit alors

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot R(Z, \lambda_P) \cdot \text{Tr}_\chi(h) \cdot \text{Tr}((\bullet \lambda_P^2) \circ M_P^P \circ h, \text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P))$$

$$\left[\frac{1 - Z_1}{1 - Z_1 \cdot q^{2s_P}} \cdot \frac{\zeta_X(1 + 4s_P)/\zeta_X^{-1}(1)}{\zeta_X(2 + 4s_P)/\zeta_X(2)} + \frac{1 - Z_1}{1 - Z_1 \cdot q^{-2s_P}} \cdot \frac{\zeta_X(1 - 4s_P)/\zeta_X^{-1}(1)}{\zeta_X(2 - 4s_P)/\zeta_X(2)} \right].$$

Or on a

$$\frac{\zeta_X(1 + 4s_P)/\zeta_X^{-1}(1)}{\zeta_X(2 + 4s_P)/\zeta_X(2)} = \frac{1}{1 - q^{4s_P}} + R(\lambda_P)$$

où $R(\lambda_P)$ est une fraction rationnelle en λ_P qui n’a pas de pôle sur le cercle $\text{Im } \Lambda_P$.

On en déduit

$$\frac{1 - Z_1}{1 - Z_1 \cdot q^{2s_P}} \cdot \frac{\zeta_X(1 + 4s_P)/\zeta_X^{-1}(1)}{\zeta_X(2 + 4s_P)/\zeta_X(2)} + \frac{1 - Z_1}{1 - Z_1 \cdot q^{-2s_P}} \cdot \frac{\zeta_X(1 - 4s_P)/\zeta_X^{-1}(1)}{\zeta_X(2 - 4s_P)/\zeta_X(2)}$$

$$= (1 - Z_1) \cdot \frac{(1 - Z_1 q^{-2s_P}) - q^{-4s_P} \cdot (1 - Z_1 q^{2s_P})}{(1 - Z_1 q^{2s_P})(1 - Z_1 q^{-2s_P})(1 - q^{-4s_P})} + (1 - Z_1) \cdot \left(\frac{R(\lambda_P)}{1 - Z_1 q^{2s_P}} + \frac{R(\lambda_P^{-1})}{1 - Z_1 \cdot q^{-2s_P}} \right)$$

$$= (1 - Z_1) \cdot \frac{1}{(1 - Z_1 q^{2s_P})(1 - Z_1 q^{-2s_P})} + (1 - Z_1) \cdot \frac{(1 - Z_1 q^{-2s_P}) R(\lambda_P) + (1 - Z_1 q^{2s_P}) R(\lambda_P^{-1})}{(1 - Z_1 q^{2s_P})(1 - Z_1 q^{-2s_P})}.$$

Enfin, on sait que dès qu’on spécialise λ_P , la fraction rationnelle $R(Z, \lambda_P)$ devient bien définie en $Z = 1$ et y vaut 0 ou 1. Elle n’y vaut 1 que si $\text{Ind}_P^H(\pi \otimes \lambda_P) = \rho_* \chi$ ce qui impose $q^{2s_P} \neq 1$.

Il en résulte que si on pose $(1 - Z_1) = c \cdot (1 - Z)$ et si on spécialise λ_P , la fraction rationnelle

$$R(Z, \lambda_P) \cdot \left[\frac{1 - Z_1}{1 - Z_1 q^{2s_P}} \cdot \frac{\zeta_X(1 + 4s_P)/\zeta_X^{-1}(1)}{\zeta_X(2 + 4s_P)/\zeta_X(2)} + \frac{1 - Z_1}{1 - Z_1 \cdot q^{-2s_P}} \cdot \frac{\zeta_X(1 - 4s_P)/\zeta_X^{-1}(1)}{\zeta_X(2 - 4s_P)/\zeta_X(2)} \right]$$

est toujours bien définie en $Z = 1$, et s’y annule sauf pour un nombre fini de valeurs de λ_P .

On conclut d’après le Lemme III.12. □

6 Développements asymptotiques et formules de traces

Dans ce paragraphe qui est une simple parenthèse, on considère le groupe linéaire $G = \text{GL}_r$.

Si K est un sous-groupe ouvert de K_0^G et h une fonction de Hecke dans \mathcal{H}_K^G/A_G , on dispose de la fonction

$$g \mapsto \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^G(g, g)$$

sur $Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G$, et on peut former la série formelle en la variable Z_1

$$\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G) \cdot \sum_{N \in \mathbb{N}} Z_1^N \cdot \text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N} \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^G(g, g).$$

On a la décomposition

$$\Lambda_1 \Lambda_2 K_h^G = \sum_{(P, \pi)} \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{(P, \pi)}$$

où on fait décrire à (P, π) un ensemble de représentants des classes de paires discrètes (P, π) telles que $\pi^K \neq 0$ et que tous les facteurs de π soient cuspidaux. On en déduit que notre série formelle s’écrit naturellement comme la somme finie des séries formelles

$$\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G) \cdot \sum_{N \in \mathbb{N}} Z_1^N \cdot \text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N} \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{(P, \pi)}(g, g)$$

indexées par les représentants (P, π) .

D'autre part, on sait que le noyau K_h^G admet l'expression géométrique

$$K_h^G(g_1, g_2) = \sum_{\gamma \in G(F)} h(g_2^{-1} \gamma g_1).$$

On peut proposer le problème suivant :

Problème III.14. – (i) *Pour toute paire discrète (P, π) telle que tous les facteurs de π soient cuspidaux, montrer que la série formelle*

$$\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G) \cdot \sum_{N \in \mathbb{N}} Z_1^N \cdot \text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N} \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^{(P, \pi)}(g, g)$$

vérifie les propriétés suivantes :

- C'est une fraction rationnelle en Z_1 .
- Elle admet en $Z_1 = 1$ un pôle dont l'ordre est égal à $|P|$.
- Dans son développement en $Z_1 = 1$, le coefficient de $\frac{1}{(1-Z_1)^{|P|}}$ est égal à

$$\frac{1}{|\text{Fixe}(\pi)|} \cdot \int_{\text{Im} \Lambda_P} d\lambda_P \cdot \text{Tr}(h, \text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P)).$$

(ii) *A partir de l'expression géométrique du noyau*

$$K_h^G(g_1, g_2) = \sum_{\gamma \in G(F)} h(g_2^{-1} \gamma g_1),$$

trouver des formules géométriques pour les coefficients des puissances

$$\frac{1}{(1-Z_1)^{|B|}}, \dots, \frac{1}{(1-Z_1)}$$

dans le développement en $Z_1 = 1$ de la fraction rationnelle

$$\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G) \cdot \sum_{N \in \mathbb{N}} Z_1^N \cdot \text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N} \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^G(g, g).$$

(iii) *En identifiant les coefficients de*

$$\frac{1}{(1-Z_1)^{|B|}}, \dots, \frac{1}{(1-Z_1)}$$

du côté géométrique et du côté spectral, puis en formant des combinaisons linéaires des formules obtenues, obtenir une "formule des traces" pour

$$\sum_{\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G/A_G)} \text{Tr}_{\pi}(h).$$

Remarque. Ce qu'on obtiendrait de cette façon ne devrait pas être bien différent de la formule des traces de Kuznetsov (voir le livre [Cogdell, Piatetski-Shapiro]).

□

On peut se demander s'il serait possible d'obtenir au moyen d'un développement asymptotique semblable la formule des traces d'Arthur-Selberg.

Pour cela, on a besoin de définir d'abord une fonction de multi-degrés relative à B

$$\deg_B : B(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G \rightarrow \mathbb{Z}^{|B|-1} = \mathbb{Z}^{r-1}.$$

On commence par définir

$$\deg_B : \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ 0 & \lambda_2 & \\ | & \diagdown & \ddots \\ 0 & - & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \mapsto (\deg(\lambda_2) - \deg(\lambda_1), \dots, \deg(\lambda_r) - \deg(\lambda_{r-1})).$$

Cette fonction est invariante à gauche par $B(F)$. On l'étend en une fonction invariante à droite par $K_0^G = \text{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$ sur $G(\mathbb{A})$ tout entier en utilisant la décomposition d'Iwasawa.

Si $N_{\bullet} = (N_1, \dots, N_{r-1})$ est un élément de \mathbb{N}^{r-1} , on pourra noter

$$|N_{\bullet}| = \sum_{1 \leq i < r} i(r-i) \cdot N_i = 2 \int_0^r ds \cdot p_{N_{\bullet}}(s)$$

où $p_{N_{\bullet}} : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne le "polygône convexe" défini par

- $p_{N_{\bullet}}$ est affine sur chaque intervalle entier $[i, i+1]$,
- $p_{N_{\bullet}}(0) = p_{N_{\bullet}}(r) = 0$,
- $[p_{N_{\bullet}}(i) - p_{N_{\bullet}}(i-1)] - [p_{N_{\bullet}}(i+1) - p_{N_{\bullet}}(i)] = N_i, \quad 1 \leq i < r$.

On peut former la série formelle en la variable Z_1

$$\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G) \cdot \sum_{N_{\bullet} \in \mathbb{N}^{r-1}} Z_1^{|N_{\bullet}|} \cdot \text{Moyenne}_{\deg_B(g)=N_{\bullet}} K_h^G(g, g)$$

où, pour tout $N_{\bullet} \in \mathbb{Z}^{r-1}$ et toute fonction localement constante

$$\Phi : B(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G \rightarrow \mathbb{C},$$

on pose

$$\text{Moyenne}_{\deg_B(g)=N_{\bullet}} \Phi(g) = \frac{\int_{B(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_B(g) = N_{\bullet}) \cdot \Phi(g)}{\int_{B(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_B(g) = N_{\bullet})}.$$

On a la décomposition spectrale du noyau

$$K_h^G = \sum_{(P, \pi)} K_h^{(P, \pi)}$$

indexée par un ensemble de représentants des classes de paires discrètes (P, π) telles que $\pi^K \neq 0$. Donc notre série formelle s'écrit comme la somme finie des séries formelles

$$\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G) \cdot \sum_{N_{\bullet} \in \mathbb{N}^{r-1}} Z_1^{|N_{\bullet}|} \cdot \text{Moyenne}_{\deg_B(g)=N_{\bullet}} K_h^{(P, \pi)}(g, g).$$

D'autre part, le noyau restreint à la diagonale

$$K_h^G(g, g) = \sum_{\gamma \in G(F)} h(g^{-1} \gamma g)$$

s'écrit comme une somme (dont presque tous les termes valent 0) indexée par les polynômes χ unitaires de degré r à coefficients dans F

$$K_h^G(g, g) = \sum_{\chi} K_h^{G, \chi}(g)$$

où

$$K_h^{G, \chi}(g) = \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_{\gamma} = \chi}} h(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g)$$

est défini en restreignant la sommation des $\gamma \in G(F)$ aux matrices de polynôme caractéristique $\chi_{\gamma} = \chi$.

On peut proposer la variante suivante du problème précédent :

Problème III.15. – (i) *Pour toute paire discrète (P, π) , montrer que la série formelle*

$$\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G) \cdot \sum_{N_{\bullet} \in \mathbb{N}^{r-1}} Z_1^{|N_{\bullet}|} \cdot \text{Moyenne}_{\deg_B(g) = N_{\bullet}} K_h^{(P, \pi)}(g, g)$$

vérifie les propriétés suivantes :

- C'est une fraction rationnelle en Z_1 .
- Elle admet en $Z_1 = 1$ un pôle dont l'ordre est égal à $|P|$.
- Dans son développement en $Z_1 = 1$, le coefficient de $\frac{1}{(1-Z_1)^{|P|}}$ est égal à

$$\frac{1}{|\text{Fixe}(\pi)|} \cdot \int_{\text{Im } \Lambda_P} d\lambda_P \cdot \text{Tr}(h, \text{Ind}_P^G(\pi \otimes \lambda_P)).$$

(ii) *Pour tout polynôme unitaire χ de degré r à coefficients dans F , montrer que la série formelle*

$$\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G) \cdot \sum_{N_{\bullet} \in \mathbb{N}^{r-1}} Z_1^{|N_{\bullet}|} \cdot \text{Moyenne}_{\deg_B(g) = N_{\bullet}} K_h^{G, \chi}(g)$$

vérifie les propriétés suivantes :

- C'est une fraction rationnelle en Z_1 .
- Elle admet en $Z_1 = 1$ un pôle dont l'ordre est égal au nombre $|\chi|$ de facteurs irréductibles (comptés avec multiplicités) du polynôme χ .
- Dans son développement en $Z_1 = 1$, le coefficient de $\frac{1}{(1-Z_1)^{|\chi|}}$ est égal à

$$V_{\chi} \cdot \int_{G_{\gamma_{\chi}}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} dg \cdot h(g^{-1} \cdot \gamma_{\chi} \cdot g)$$

où

- γ_{χ} est un élément de $G(F)$ dont le polynôme minimal est égal à χ ;
- V_{χ} est une constante qui vaut

$$V_{\chi} = \text{vol}(G_{\gamma_{\chi}}(F) \backslash G_{\gamma_{\chi}}(\mathbb{A}) / A_G)$$

quand le polynôme χ est irréductible (c'est-à-dire quand γ_{χ} est elliptique régulier) mais qui, en général, n'est pas ce volume puisque celui-ci est infini ;

- dg est une mesure invariante sur l'orbite adélique $G_{\gamma_{\chi}}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})$, normalisée de telle sorte que les intégrales convergent ; quand le polynôme χ est irréductible, elle est le quotient des mesures de Haar standard de $G(\mathbb{A})$ et $G_{\gamma_{\chi}}(\mathbb{A})$.

(iii) En identifiant les coefficients de

$$\frac{1}{(1-Z_1)^{|B|}}, \dots, \frac{1}{(1-Z_1)}$$

du côté géométrique et du côté spectral, puis en formant des combinaisons linéaires des formules obtenues, retrouver la formule des traces d'Arthur-Selberg pour G .

Remarque. Dans cette situation comme dans celle du Problème III.14, les coefficients les plus importants sont ceux de $\frac{1}{1-Z_1}$. \square

7 Développements asymptotiques et partie spectrale du principe de functorialité

Nous nous plaçons maintenant dans la situation plus générale d'un homomorphisme de transfert entre deux groupes linéaires dont le premier est abélien :

$$\begin{array}{ccc} L_G & \xrightarrow{\rho} & L_H \\ & \searrow & \swarrow \\ & W_F & \end{array}$$

Le groupe linéaire G est de la forme

$$G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_1$$

et il n'y a pas de restriction à supposer que H a un seul facteur

$$H = \text{Res}_{E'/F} \text{GL}_r$$

avec $r \geq 2$.

Comme toujours, on considère un sous-groupe ouvert $K = \prod_{x \in |X|} K_x$ de K_0^G , une partie finie S_0 de $|X|$ en dehors de laquelle G et H sont non ramifiés sur F et $K_x = K_{0,x}^G$, puis un sous-groupe ouvert $K' = \prod_{x \in |X|} K'_x$ de K_0^H tel que $K'_x = K_{0,x}^H$, $\forall x \notin S_0$, et que, en chaque place $x \in S_0$, K'_x soit assez petit en fonction de K_x et de la ramification de G et H .

Enfin, on choisit une partie finie $S \subset |X| - S_0$ assez grande pour vérifier les conclusions du Lemme II.2.

On considère en chaque place $x \in S$ une série formelle

$$\Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z)$$

qui vérifie les conditions du Lemme II.3, et on note

$$\Delta_S^{G,H} = \bigotimes_{x \in S} \Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z)$$

l'élément correspondant dans le centre de

$$(\mathcal{H}_K^G \otimes \mathcal{H}_{K'}^H)[[Z]].$$

Enfin, on considère deux fonctions de Hecke

$$h \in \mathcal{H}_K^G \quad \text{et} \quad h' \in \mathcal{H}_{K'}^H.$$

Pour toute représentation π' du spectre d'Eisenstein $\Pi_{\text{Eis,cusp}}(H/A_H)$, il existe par définition un sous-groupe parabolique $P_{\pi'} \subsetneq H$ et une représentation automorphe cuspidale π'_0 de $M_{P_{\pi'}}(\mathbb{A})/A_H$ tels que $\pi \cong \text{Ind}_{P_{\pi'}}^H(\pi'_0)$.

Dans cette situation et avec ces notations, on doit pouvoir montrer l'énoncé suivant. Il généralise à un homomorphisme de transfert entre deux groupes linéaires dont le premier est commutatif et le second a un seul facteur, l'énoncé déjà prouvé dans le cas de l'induction automorphe quadratique de GL_1 à GL_2 :

Problème III.16. – (i) *Pour toutes fonctions de Hecke $h \in \mathcal{H}_K^G/A_G$, $h' \in \mathcal{H}_K^H/A_H$, et tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, montrer que la série formelle (qui ne dépend pas de g)*

$$(1 - Z_1) \cdot \sum_{N \in \mathbb{N}} Z_1^N \cdot \text{vol}(H(F) \backslash H(\mathbb{A})/A_H) \cdot \text{Moyenne}_{\deg_Q(g')=N} [K^G(g, g) \times \Lambda_1 \Lambda_2 K^H(g', g')] ((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z))$$

vérifie les propriétés suivantes :

- C'est une fraction rationnelle en Z_1 et Z .
- Si on pose la condition

$$(1 - Z_1) = c \cdot (1 - Z)$$

pour une certaine constante c , on obtient une fraction rationnelle en Z qui est bien définie en $Z = 1$. Elle y vaut

$$\sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\text{aut}}(G/A_G) \\ \pi' \in \Pi_{\text{cusp}}(H/A_H) \\ \pi' = \rho_* \pi}} K_h^{G,\pi}(g, g) \cdot \text{Tr}_{\pi'}(h') + \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\text{aut}}(G/A_G) \\ \pi' \in \Pi_{\text{Eis,cusp}}(H/A_H) \\ \pi' = \rho_* \pi}} \frac{c(\Delta_S^{G,H}, \pi')}{c^{|P_{\pi'}|-1}} \cdot K_h^{G,\pi}(g, g) \cdot \text{Tr}_{\pi'}(h')$$

où chaque constante $c(\Delta_S^{G,H}, \pi')$ ne dépend que de $\Delta_S^{G,H}$ et de π' .

(ii) En appliquant la fonctionnelle

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot$$

ou, ce qui revient au même, en multipliant par $\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G)$, en déduire une formule pour

$$\sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\text{aut}}(G/A_G) \\ \pi' \in \Pi_{\text{cusp}}(H/A_H) \\ \pi' = \rho_* \pi}} \text{Tr}_{\pi}(h) \cdot \text{Tr}_{\pi'}(h') + \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\text{aut}}(G/A_G) \\ \pi' \in \Pi_{\text{Eis,cusp}}(H/A_H) \\ \pi' = \rho_* \pi}} \frac{c(\Delta_S^{G,H}, \pi')}{c^{|P_{\pi'}|-1}} \cdot \text{Tr}_{\pi}(h) \cdot \text{Tr}_{\pi'}(h').$$

(iii) Lorsqu'on fait varier la fraction rationnelle $\Delta_S^{G,H}(Z) = \bigotimes_{x \in |X|} \Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z)$ et la constante c , montrer

que l'espace affine des fonctionnelles bilinéaires en $h \in \mathcal{H}_K^G/A_G$ et $h' \in \mathcal{H}_K^H/A_H$ engendré par celles obtenues dans (ii) contient la fonctionnelle

$$(h, h') \mapsto \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\text{aut}}(G/A_G) \\ \pi' \in \Pi_{\text{aut}}(H/A_H) \\ \pi' = \rho_* \pi}} \text{Tr}_{\pi}(h) \cdot \text{Tr}_{\pi'}(h').$$

□

Le principe de functorialité serait alors équivalent à l'égalité de la formule qu'on aurait obtenue dans (iii) et de la formule

$$\sum_{\pi \in \Pi_{\text{aut}}(G/A_G)} \text{Tr}_{\pi}(h) \cdot \text{Tr}_{\pi}(h_1) = \text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G) \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} (h * h_1)(\gamma) \quad \text{avec} \quad h_1 = \rho^* h'.$$

Ou, si l'on préfère, il serait équivalent à ce que la fonctionnelle bilinaire

$$(h, h') \mapsto \sum_{\pi \in \Pi_{\text{aut}}(G/A_G)} \text{Tr}_{\pi}(h) \cdot \text{Tr}_{\pi}(\rho^* h') = \text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G) \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} (h * \rho^* h')(\gamma)$$

soit contenue dans l'espace affine de (iii).

Exposé IV : Et du côté géométrique ?

On continue à s'intéresser au principe de fonctorialité de Langlands entre deux groupes algébriques linéaires G et H reliés par un homomorphisme de transfert entre leurs groupes duaux.

Dans le cas où le groupe linéaire de départ G est abélien, on a introduit dans le précédent exposé un certain espace affine de fonctionnelles bilinéaires en les paires de fonctions de Hecke sur G et H . Ces fonctionnelles ont été définies comme des limites formelles de séries dont les coefficients ont des expressions géométriques.

On aborde ici la question de chercher des formules géométriques explicites pour ces fonctionnelles.

En utilisant la décomposition de Bruhat et le théorème de Shintani sur les modèles de Whittaker des groupes linéaires, on s'engage dans une direction qui conduit à formuler une conjecture encore assez vague (mais que nous préciserons et justifierons en partie dans une prochaine publication). On suppose que nos fonctionnelles s'obtiennent en appliquant à certaines fonctions explicites :

- d'abord une transformation par intégration sur des produits de cercles indexés par un ensemble fini de places, pour la mesure de Haar ;
- puis une moyenne sur les éléments rationnels des fonctions sur les tores maximaux adéliques de G et H obtenues par la transformation précédente.

Le calcul de cette moyenne est difficile car les fonctions qu'on obtient sur ces tores adéliques sont très oscillantes. C'est ce qu'on voit dans le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2 via une extension quadratique, qui fera l'objet du prochain exposé.

Les calculs que nous ferons dans ce cas nous inciteront à proposer dans l'Exposé V une formule géométrique pour la valeur de cette moyenne sur les éléments rationnels, dans le cadre du transfert automorphe entre deux groupes linéaires dont le premier est abélien.

Si cette conjecture était vraie, elle rendrait l'existence du transfert entre deux tels groupes linéaires équivalente à une famille d'identités locales indexées par les places de F .

Dans une prochaine publication, nous généraliserons notre approche et les conjectures du présent exposé IV et de l'Exposé V au cadre général du transfert entre deux groupes linéaires arbitraires.

1 Expression géométrique des moyennes des noyaux tronqués

On considère un groupe linéaire général

$$G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} GL_{r_i}.$$

On rappelle que, pour toute famille d'entiers $N_\bullet = (N_i)_{i \in I_G}$, on s'intéresse à la fonctionnelle qui associe à toute fonction de Hecke $h \in \mathcal{H}^G/A_G$ la moyenne

$$\text{Moyenne}_{\deg_Q(g)=N_\bullet} \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^G(g, g) = \frac{\int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^G(g, g)}{\int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet)}.$$

Dans le groupe de Weyl du groupe linéaire G

$$W_G = \prod_{i \in I_G} \mathfrak{S}_{r_i},$$

on dispose de l'élément de longueur maximale w_0 qui inverse l'ordre de l'ensemble $\{1, 2, \dots, r_i\}$ pour tout $i \in I_G$. Pour toute famille $\underline{r} = \{r_i = r_{i,1} + \dots + r_{i,k_i}\}$ de partitions des entiers r_i , $i \in I_G$, on notera $w_{\underline{r}}$ l'élément de W_G tel que $w_0 w_{\underline{r}}$ agit sur chaque $\{1, 2, \dots, r_i\}$ en inversant l'ordre des éléments dans $\{1, 2, \dots, r_{i,1}\}$, puis $\{r_{i,1} + 1, \dots, r_{i,1} + r_{i,2}\}, \dots$, puis $\{r_{i,1} + r_{i,2} + \dots + r_{i,k_i-1} + 1, \dots, r_i\}$. Autrement dit, la composante d'indice $i \in I_G$ de $w_{\underline{r}}$ vue comme une matrice est :

$$\left(\begin{array}{cccc} & & & \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{array} \right) \\ & & & \vdots \\ & & \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{array} \right) & \dots \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{array} \right) & & & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{array} \right)} \right\} r_{i,k_i} \\ \vdots \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{array} \right)} \right\} r_{i,2} \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{array} \right)} \right\} r_{i,1} \end{array}$$

Rappelant le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures

$$B_G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} B_{r_i},$$

et son radical unipotent

$$N_B = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} N_{r_i},$$

on notera pour toute famille $\{r_i = r_{i,1} + \dots + r_{i,k_i}\} = \underline{r}$ de partitions comme ci-dessus

$$N_{\underline{r}} = N_B \cap w_{\underline{r}} \cdot N_B \cdot w_{\underline{r}}^{-1} = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} (N_{r_{i,1}} \times \dots \times N_{r_{i,k_i}}),$$

et

$$T_{\underline{r}} = \{(\lambda_{i,k})_{\substack{i \in I_G \\ 1 \leq k \leq r_i}} \mid \lambda_{i,k} = \lambda_{i,k'} \text{ si } 1 \leq k < k' \leq r_i \text{ et } w_{\underline{r}}(k) < w_{\underline{r}}(k')\}$$

le commutateur de $N_{\underline{r}}$ dans le tore maximal $T_G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \mathbb{G}_m^{r_i}$ des matrices diagonales. Autrement dit, $T_{\underline{r}}$ est le sous-groupe des matrices diagonales dont les composantes sont égales quand leurs indices appartiennent à un même segment

$$\{r_{i,1} + \dots + r_{i,j} + 1, r_{i,1} + \dots + r_{i,j} + 2, \dots, r_{i,1} + \dots + r_{i,j} + r_{i,j+1}\}$$

de la partition \underline{r} des intervalles $\{1, 2, \dots, r_i\}$, $i \in I_G$.

Prouvons :

Proposition IV.1. – *Pour toute famille d'entiers $N_\bullet = (N_i)_{i \in I_G}$ et toute fonction de Hecke $h \in \mathcal{H}^G/A_G$, l'intégrale*

$$\int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^G(g, g)$$

est égale à la somme

$$\sum_{\underline{r}} \sum_{\gamma \in T_{\underline{r}}(F)} \int_{N_{\underline{r}}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/A_G \cdot Z_G(F)} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})} dn \cdot \psi_B(n) \cdot h(g^{-1} \cdot w_{\underline{r}} \cdot \gamma \cdot n \cdot g).$$

Démonstration. On sait d'après le Lemme III.4 que l'intégrale

$$\int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot \Lambda_1 \Lambda_2 K_h^G(g, g)$$

est égale à

$$\begin{aligned} & \int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot \sum_{\gamma \in N_B^-(F) \backslash G^-(F)} \int_{[N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})]^2} dn_1 \cdot dn_2 \cdot \psi_B(n_1 \cdot n_2^{-1}) \\ & \quad \cdot K_h^G(n_1 \cdot \gamma g, n_2 \cdot \gamma g) \\ &= \int_{N_B(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G \cdot Z_G(F)} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} dn \cdot \psi_B(n) \cdot \sum_{\delta \in G(F)} h(g^{-1} \cdot \delta \cdot n \cdot g) \\ &= \int_{N_B(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G \cdot Z_G(F)} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot \sum_{\delta \in G(F)/N_B(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} dn \cdot \psi_B(n) \cdot h(g^{-1} \cdot \delta \cdot n \cdot g). \end{aligned}$$

Or, d'après la décomposition de Bruhat, tout élément de $G(F)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\eta_2 \cdot w \cdot \gamma \cdot \eta_1$$

où

- $w \in W_G$ est un élément du groupe de Weyl de G , identifié à une matrice de permutation,
- $\gamma \in T_G(F)$ est une matrice diagonale,
- η_1 et η_2 sont deux éléments de $N_B(F)$, modulo le sous-groupe $N_B(F) \cap w \cdot N_B(F) \cdot w^{-1}$.

Par conséquent, notre intégrale s'écrit encore comme une somme

$$\sum_{w \in W_G} \int_{(N_B(F) \cap w \cdot N_B(F) \cdot w^{-1}) \backslash G(\mathbb{A})/A_G \cdot Z_G(F)} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_\bullet) \cdot \sum_{\gamma \in T_G(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} dn \cdot \psi_B(n) \cdot h(g^{-1} \cdot w \cdot \gamma \cdot n \cdot g).$$

On conclut grâce au lemme suivant qui permet de ne garder dans la sommation que les w de la forme $w_{\underline{r}}$ et les $\gamma \in T_{\underline{r}}(F)$:

Lemme IV.2. – *Une intégrale de la forme*

$$\int_{(N_B(F) \cap w \cdot N_B(F) \cdot w^{-1}) \backslash (N_B(\mathbb{A}) \times N_B(\mathbb{A}))} dn_1 \cdot dn_2 \cdot \psi_B(n_1 n_2^{-1}) \cdot h(g_2^{-1} \cdot n_2^{-1} \cdot w \cdot \gamma \cdot n_1 \cdot g_1)$$

avec $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, $w \in W_G$, $\gamma \in T_G(F)$ et $N_B(F) \cap w \cdot N_B(F) \cdot w^{-1}$ plongé dans $N_B(\mathbb{A}) \times N_B(\mathbb{A})$ par

$$\eta \mapsto (\gamma^{-1} \cdot w^{-1} \cdot \eta \cdot w \cdot \gamma, \eta)$$

ne peut être non nulle que si w est du type

$$w_{\underline{r}}$$

pour une certaine famille de partitions \underline{r} , et si

$$\gamma \in T_{\underline{r}}(F).$$

□

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où $G = \mathrm{GL}_r$.

Pour que l'intégrale du lemme ne s'annule pas, il faut que les deux caractères

$$\begin{aligned} n &\mapsto \psi_r(n) \\ n &\mapsto \psi_r(\gamma^{-1} \cdot w^{-1} \cdot n \cdot w \cdot \gamma) \end{aligned}$$

coïncident sur l'intersection $N_B(\mathbb{A}) \cap w \cdot N_B(\mathbb{A}) \cdot w^{-1}$.

Or, si la permutation w n'est pas du type $w_{\underline{r}}$, on peut trouver un indice $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ tel que $w(k+1) \geq w(k) + 2$ si bien que ces deux caractères ne coïncident pas.

Si au contraire $w = w_{\underline{r}}$ pour une certaine partition $r = r_1 + r_2 + \dots + r_k$, $N_B(\mathbb{A}) \cap w \cdot N_B(\mathbb{A}) \cdot w^{-1}$ s'identifie à $N_{r_1}(\mathbb{A}) \times N_{r_2}(\mathbb{A}) \times \dots \times N_{r_k}(\mathbb{A})$ et les deux caractères coïncident seulement si $\gamma \in T_{\underline{r}}(F)$. □

2 Modèles de Whittaker et décompositions spectrales locales

On reste avec notre groupe linéaire

$$G = \prod_{i \in I_G} \mathrm{Res}_{E_i/F} \mathrm{GL}_{r_i}.$$

Si $K = \prod_{x \in |X|} K_x$ est un sous-groupe ouvert de K_0^G , on peut considérer l'espace

$$\mathcal{L}_{K, \psi_B}(N_B(F) \backslash G(\mathbb{A}))$$

des fonctions

$$\varphi : N_B(F) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que

- φ est invariante à droite par K ,
- $\varphi(n \cdot g) = \psi_B(n)^{-1} \cdot \varphi(g)$, $\forall n \in N_B(\mathbb{A})$, $\forall g \in G(\mathbb{A})$.

L'algèbre de Hecke \mathcal{H}_K^G agit sur cet espace par convolution à droite et toute fonction $h \in \mathcal{H}_K^G$ admet un noyau pour son action, qui s'écrit

$$K_h^{G, \psi_B} : (g_1, g_2) \mapsto \int_{N_B(\mathbb{A})} dn \cdot \psi_B(n) \cdot h(g_2^{-1} \cdot n \cdot g_1).$$

On voit en particulier que la somme de la Proposition IV.1 s'écrit encore

$$\sum_{\underline{r}} \sum_{\gamma \in T_{\underline{r}}(F)} \int_{N_{\underline{r}}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G \cdot Z_G(F)} dg \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g) = N_{\bullet}) \cdot K_h^{G, \psi_B}(g, \gamma \cdot w_{\underline{r}}^{-1} \cdot g).$$

Pour toute place $x \in |X|$, notons ψ_x la composante locale de ψ_B sur $N_B(F_x)$ et $\mathcal{L}_{K_x, \psi_x}(G(F_x))$ l'espace des fonctions

$$\varphi : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que :

- φ est invariante à droite par K_x ,
- $\varphi(n_x \cdot g_x) = \psi_x(n_x)^{-1} \cdot \varphi(g_x)$, $\forall n_x \in N_B(F_x)$, $\forall g_x \in G(F_x)$.

L'algèbre de Hecke locale \mathcal{H}_{x, K_x}^G agit sur cet espace par convolution à droite et l'action de toute fonction $h_x \in \mathcal{H}_{x, K_x}^G$ admet un noyau qui s'écrit

$$K_{h_x}^{G, \psi_x} : (g_1, g_2) \mapsto \int_{N_B(F_x)} dn_x \cdot \psi_x(n_x) \cdot h_x(g_2^{-1} \cdot n_x \cdot g_1).$$

L'espace $\mathcal{L}_{K, \psi_B}(N_B(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ est le produit tensoriel infini de tous les espaces locaux $\mathcal{L}_{K_x, \psi_x}(G(F_x))$, $x \in |X|$, et si $h = \bigotimes_{x \in |X|} h_x$ est un élément de \mathcal{H}_K^G décomposé en facteurs, les noyaux locaux et globaux sont reliés par la formule

$$K_h^{G, \psi_B}(\bullet, \bullet) = \prod_{x \in |X|} K_{h_x}^{G, \psi_x}(\bullet, \bullet).$$

Allons en une place $x \in |X|$ où le groupe G (c'est-à-dire les extensions E_i , $i \in I_G$, de F) est non ramifié sur F . Chaque $E_{i,x} = E_i \otimes_F F_x$ se décompose en

$$\prod_{j \in I_{i,x}} F_{x,i,j},$$

et on peut écrire

$$G(F_x) = \prod_{i \in I_G} \prod_{j \in I_{i,x}} \mathrm{GL}_{r_i}(F_{x,i,j}).$$

Si $K_x = K_{0,x}^G$ et si la forme différentielle rationnelle ω_X (qui sert à définir le caractère ψ_B) est régulière en x , c'est-à-dire n'y a ni zéro ni pôle, nous allons rappeler la décomposition spectrale de l'espace

$$\mathcal{L}_{K_x, \psi_x}(G(F_x))$$

muni de l'action par convolution à droite de l'algèbre de Hecke sphérique

$$\mathcal{H}_{x,\phi}^G \xrightarrow{S_x^G} \bigotimes_{i \in I_G} \bigotimes_{j \in I_{i,x}} \mathbb{C}[X_{i,j,1}^{\pm 1}; \dots; X_{i,j,r_i}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_i}.$$

On commence par rappeler le théorème suivant (pour lequel on renvoie à la note [Shintani] ainsi qu'à l'article [Casselman, Shalika]) :

Théorème IV.3. (Shintani) – *Supposons comme ci-dessus que G est non ramifié sur F en la place x et que la forme ω_X y est régulière.*

(i) *Alors, pour tout élément*

$$\lambda_{\bullet} = (\lambda_{i,j,k}) \in \prod_{i \in I_G} \prod_{j \in I_{i,x}} (\mathbb{C}^{\times})^{(r_i)},$$

il existe une unique fonction

$$W_{x,\lambda_{\bullet}} = \prod_{i \in I_G} \prod_{j \in I_{i,x}} W_{x,i,j,\lambda_{\bullet}} : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

telle que :

- W_{x,λ_\bullet} est invariante à droite par $K_{0,x}^G$,
- $W_{x,\lambda_\bullet}(1) = 1$ (et $W_{x,i,j,\lambda_\bullet}(1) = 1, \forall i, j$),
- $W_{x,\lambda_\bullet}(n_x \cdot g_x) = \psi_x(n_x)^{-1} \cdot W_{x,\lambda_\bullet}(g_x), \forall n_x \in N_B(F_x), \forall g_x \in G(F_x)$,
- $W_{x,\lambda_\bullet} * h_x = S_x^G(h_x)(\lambda_\bullet) \cdot W_{x,\lambda_\bullet}$

pour toute fonction sphérique $h_x \in \mathcal{H}_{x,\phi}^G$.

(ii) De plus, les valeurs de cette fonction W_{x,λ_\bullet} et de ses composantes les $W_{x,i,j,\lambda_\bullet}$ sont entièrement spécifiées par la règle suivante :

Si $m_{i,j} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{r_i} \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale dans $\text{GL}_{r_i}(F_{x,i,j})$ avec

$$v_1 = v_x \circ \text{Nm}(\mu_1), \dots, v_{r_i} = v_x \circ \text{Nm}(\mu_{r_i}),$$

$W_{x,i,j,\lambda_\bullet}(m_{i,j})$ n'est non nul que si

$$v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_{r_i},$$

et dans ce cas il est égal au produit de

$$q_x^{\left(\sum_{1 \leq k \leq r_i} \frac{2k-1-r_i}{2} \cdot v_k\right)} \cdot \frac{1}{\prod_{1 \leq k < k' \leq r_i} (\lambda_k - \lambda_{k'})}$$

et du déterminant.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^{v_1+r_i-1} & \lambda_2^{v_1+r_i-1} & \dots & \lambda_{r_i}^{v_1+r_i-1} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{v_{r_i}} & \lambda_2^{v_{r_i}} & \dots & \lambda_{r_i}^{v_{r_i}} \end{vmatrix}.$$

Démonstration de (ii) quand $G = \text{GL}_2$. Rappelons une preuve de la formule de (ii) quand $G = \text{GL}_2$ (que l'on peut déjà trouver dans [Godement]).

Si $m = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$ avec $v_x(\mu_1) = v_1, v_x(\mu_2) = v_2$, il s'agit de démontrer

$$W_{x,\lambda_\bullet}(m) = q_x^{\frac{v_2-v_1}{2}} \cdot \sum_{\substack{n_1+n_2=v_1+v_2 \\ v_1 \geq n_1, n_2 \geq v_2}} \lambda_1^{n_1} \cdot \lambda_2^{n_2}.$$

Pour démontrer cette formule, on part de la fonction $\varphi_{x,\lambda_\bullet}$ sur $G(F_2) = \text{GL}_2(F_x)$ qui vérifie :

- elle est invariante à droite par $\text{GL}_2(O_x) = K_{0,x}^G$,
- elle est invariante à gauche par $N_{B^{\text{op}}}(F_x)$,
- si $m = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$ avec $v_x(\mu_1) = v_1, v_x(\mu_2) = v_2$, on a

$$\varphi_{x,\lambda_\bullet}(m) = \lambda_1^{v_1} \cdot \lambda_2^{v_2} \cdot q_x^{\frac{v_1-v_2}{2}}.$$

On sait déjà que pour toute fonction sphérique $h_x \in \mathcal{H}_{x,\phi}^G$, on a

$$\varphi_{x,\lambda_\bullet} * h_x = S_x^G(h_x)(\lambda_\bullet) \cdot \varphi_{x,\lambda_\bullet}.$$

Il en résulte que la fonction cherchée W_{x,λ_\bullet} est égale à une constante multiplicative près à la fonction

$$g_x \mapsto \int_{N_B(F_x)} dn_x \cdot \psi_x(n_x) \cdot \varphi_{x,\lambda_\bullet}(n_x \cdot g)$$

dès que cette intégrale converge.

Calculons donc l'intégrale

$$\begin{aligned} & \int_{F_x} du_x \cdot \psi(\text{Res}(u_x \cdot \omega_X)) \cdot \varphi_{x,\lambda_\bullet} \left(\begin{pmatrix} 1 & u_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \int_{F_x} du_x \cdot \psi(\text{Res}(u_x \cdot \omega_X)) \cdot \varphi_{x,\lambda_\bullet} \left(\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mu_2}{\mu_1} u_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Comme la forme différentielle ω_X est régulière en x , cette intégrale vaut 0 si $v_x \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \geq 1$, soit $v_2 > v_1$, car alors $u_x \mapsto \varphi_{x,\lambda_\bullet} \left(\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mu_2}{\mu_1} u_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est invariante par le groupe additif $\pi_x^{-1} \cdot O_x$.

Au contraire, si $v_1 \geq v_2$, cette intégrale vaut

$$\begin{aligned} & q_x^{v_2-v_1} \cdot (\lambda_1^{v_1} \cdot \lambda_2^{v_2} \cdot q_x^{\frac{v_1-v_2}{2}}) + \sum_{0 < i \leq v_1-v_2} q_x^{v_2-v_1+i} \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x} \right) \cdot \left(\lambda_1^{v_1-i} \cdot \lambda_2^{v_2+i} \cdot q_x^{\frac{v_1-v_2}{2}-i} \right) \\ & - \left(\lambda_1^{v_2-1} \cdot \lambda_2^{v_1+1} \cdot q_x^{\frac{v_2-v_1}{2}-1} \right) \\ &= \frac{v_2-v_1}{q_x^{\frac{v_2-v_1}{2}}} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_1^{-1} \cdot \lambda_2}{q_x} \right) \cdot \left[\sum_{0 \leq i \leq v_1-v_2} \lambda_1^{v_1-i} \cdot \lambda_2^{v_2+i} \right]. \end{aligned}$$

On obtient la fonction cherchée W_{x,λ_\bullet} en divisant cette expression par la constante $\left(1 - \frac{\lambda_1^{-1} \cdot \lambda_2}{q_x} \right)$. \square

Puis on a un énoncé de décomposition spectrale locale pour les fonctions non ramifiées :

Proposition IV.4. – Dans la situation du Théorème IV.3, associons à tout polynôme en les $\lambda_{i,j,k}$ et $\lambda_{i,j,k}^{-1}$

$$P : \lambda_\bullet = (\lambda_{i,j,k})_{\substack{i \in I_G, j \in I_{i,x} \\ 1 \leq k \leq r_i}} \mapsto P(\lambda_\bullet)$$

la fonction de $\mathcal{L}_{K_{0,x}^G, \psi_x}(G(F_x))$ définie par l'intégrale

$$W_{x,P} : g \mapsto W_{x,P}(g) = \int_{|\lambda_{i,j,k}|=1} d\lambda_\bullet \cdot W_{x,\lambda_\bullet}(g).$$

Alors on a :

(i) Pour P un tel polynôme en les $\lambda_{i,j,k}$ et $\lambda_{i,j,k}^{-1}$, la fonction $|W_{x,P}|$ est à support compact sur $N_B(F_x) \backslash G(F_x)$ dès que P s'annule sur tous les hyperplans

$$\lambda_{i,j,k} = \lambda_{i,j,k'}, \quad i \in I_G, \quad j \in I_{i,x}, \quad 1 \leq k < k' \leq r_i.$$

(ii) Si P et P' sont deux polynômes vérifiant la condition de (i), on a

$$\langle W_{x,P}; W_{x,P'} \rangle = \langle P; P' \rangle$$

si on pose

$$\langle P; P' \rangle = \int_{|\lambda_{i,j,k}|=1} d\lambda_{\bullet} \cdot \frac{\sum_{\sigma, \sigma' \in \prod_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} \mathfrak{S}_{r_i}} \sigma(P)(\lambda_{\bullet}) \cdot \overline{\sigma'(P')(\lambda_{\bullet})}}{\prod_{\substack{i \in I_G, j \in I_{i,x} \\ 1 \leq k < k' \leq r_i}} |\lambda_{i,j,k} - \lambda_{i,j,k'}|^2}.$$

(iii) L'homomorphisme

$$P \mapsto W_{x,P}$$

induit donc un isomorphisme de l'espace de Hilbert des fonctions symétriques en les variables $\lambda_{i,j,k}$ muni du produit hermitien défini par la formule de (ii) vers l'espace de Hilbert des fonctions de $\mathcal{L}_{K_{0,x}, \psi_x}(G(F_x))$ dont le carré est intégrable.

Remarque. Pour démontrer ce théorème, il suffit de traiter le cas où $G = \mathrm{GL}_r$.

La formule de (ii) résulte alors des calculs de l'article [Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika] : plus précisément, voir le cas $r = t$ du théorème 2.7 (i) (ii), pages 390-391, et le calcul explicite des facteurs L locaux par dévissage.

Démonstration dans le cas où $G = \mathrm{GL}_2$. Dans ce cas, λ_{\bullet} ne consiste qu'en deux variables λ_1 et λ_2 . Et si P est un monôme

$$P(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^{-k_1} \cdot \lambda_2^{-k_2} \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{Z},$$

alors on a d'après l'expression explicite des fonctions $W_{x,\lambda}$:

$$W_{x,P} \left(\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} q_x^{\frac{v_x(\mu_2) - v_x(\mu_1)}{2}} & \text{si } \begin{aligned} v_x(\mu_1 \mu_2) &= k_1 + k_2, \\ v_x(\mu_1) &\geq k_1, k_2 \geq v_x(\mu_2), \end{aligned} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si donc P est un polynôme en $\lambda_1^{\pm 1}, \lambda_2^{\pm 1}$ qui s'annule sur la diagonale $\lambda_1 = \lambda_2$, la fonction $|W_{x,P}|$ est à support compact sur $N_B(F_x) \backslash G(F_x)$ et a fortiori elle est de carré intégrable.

Etant donnés deux tels polynômes P et P' qui s'annulent sur la diagonale, nous voulons calculer le produit hermitien

$$\begin{aligned} \langle W_{x,P}; W_{x,P'} \rangle &= \int_{N_B(F_x) \backslash G(F_x)} \frac{dg}{dn} \cdot W_{x,P}(g) \cdot \overline{W_{x,P'}(g)} \\ &= \int_{F_x^{\times} \times F_x^{\times}} d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot q_x^{v_x(\mu_1) - v_x(\mu_2)} \cdot (W_{x,P} \cdot \overline{W_{x,P'}}) \left(\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons formellement

$$\Phi(X_1, X_2; \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\substack{v_1 \geq k_1, k_2 \geq v_2 \\ v_1 + v_2 = k_1 + k_2}} X_1^{v_1} \cdot X_2^{v_2} \right) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} = \sum_{v_1 \geq v_2} \Phi_{v_1, v_2}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot X_1^{v_1} \cdot X_2^{v_2}$$

avec

$$\Phi_{v_1, v_2}(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^{v_1} \cdot \lambda_2^{v_2} + \lambda_1^{v_1-1} \cdot \lambda_2^{v_2+1} + \dots + \lambda_1^{v_2} \cdot \lambda_2^{v_1} = \frac{\lambda_1^{v_1+1} \cdot \lambda_2 - \lambda_1^{v_2} \cdot \lambda_2^{v_1+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Alors le produit hermitien

$$\langle W_{x,P}; W_{x,P'} \rangle$$

est égal à la somme finie

$$\sum_{v_1 \geq v_2} \left(\iint_{|\lambda_1|=1=|\lambda_2|} d\lambda_1 \cdot d\lambda_2 \cdot \Phi_{v_1, v_2}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot P(\lambda_1, \lambda_2) \right) \cdot \overline{\left(\iint_{|\lambda'_1|=1=|\lambda'_2|} d\lambda'_1 \cdot d\lambda'_2 \cdot \Phi_{v_1, v_2}(\lambda'_1, \lambda'_2) \cdot P'(\lambda'_1, \lambda'_2) \right)}.$$

Si V est un entier assez grand, cette somme est égale à la même restreinte aux indices

$$v_1 \geq v_2 \geq -V.$$

Elle vaut

$$\sum_{v_1 \geq v_2 \geq -V} \int \cdots \int_{\substack{|\lambda_1|=1=|\lambda_2| \\ |\lambda'_1|=1+\varepsilon=|\lambda'_2|}} d\lambda_1 \cdot d\lambda_2 \cdot d\lambda'_1 \cdot d\lambda'_2 \cdot \Phi_{v_1, v_2}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \Phi_{v_1, v_2}(\lambda'_1, \lambda'_2) \cdot P(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \bar{P}'(\lambda'_1, \lambda'_2)$$

avec

$$\begin{aligned} & \sum_{v_1 \geq v_2 \geq -V} \Phi_{v_1, v_2}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \Phi_{v_1, v_2}(\lambda'_1, \lambda'_2) \\ = & \sum_{v_1 \geq v_2 \geq -V} \frac{\lambda_1^{v_1+1} \cdot \lambda_2^{v_2} - \lambda_1^{v_2} \cdot \lambda_2^{v_1+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1'^{-v_1-1} \cdot \lambda_2'^{-v_2} - \lambda_2'^{-v_2} \cdot \lambda_1'^{-v_1-1}}{\lambda_1'^{-1} - \lambda_2'^{-1}} \\ = & \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\lambda_1'^{-1} - \lambda_2'^{-1})} \cdot \left[\sum_{v_2 \geq -V} \left(\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1' \cdot \lambda_2'} \right)^{v_2} \right] \cdot \left[\sum_{v \geq 0} (\lambda_1^{v+1} - \lambda_2^{v+1}) \cdot (\lambda_1'^{-v-1} - \lambda_2'^{-v-1}) \right] \\ = & \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\lambda_1'^{-1} - \lambda_2'^{-1})} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1' \cdot \lambda_2'} \right)^{-V_2}}{1 - \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1' \cdot \lambda_2'}} \cdot \left[\frac{\lambda_1 \lambda_1'^{-1}}{1 - \lambda_1 \lambda_1'^{-1}} + \frac{\lambda_2 \lambda_2'^{-1}}{1 - \lambda_2 \lambda_2'^{-1}} - \frac{\lambda_1 \lambda_2'^{-1}}{1 - \lambda_1 \lambda_2'^{-1}} - \frac{\lambda_2 \lambda_1'^{-1}}{1 - \lambda_2 \lambda_1'^{-1}} \right]. \end{aligned}$$

Par déplacement des contours d'intégration et calcul des résidus, on obtient

$$\langle W_{x, P}; W_{x, P'} \rangle = \iint_{|\lambda_1|=1=|\lambda_2|} d\lambda_1 \cdot d\lambda_2 \cdot \frac{1}{|\lambda_1 - \lambda_2|^2} \cdot [P(\lambda_1, \lambda_2) + P(\lambda_2, \lambda_1)] \cdot \overline{[P'(\lambda_1, \lambda_2) + P'(\lambda_2, \lambda_1)]}.$$

Cela termine la preuve dans le cas où $G = \text{GL}_2$. □

On déduit de la Proposition IV.4 :

Corollaire IV.5. – Soit $x \in |X|$ une place où G est non ramifié sur F et $K_x = K_{0,x}^G$. Alors :

(i) Il existe une fonction continue (unique si on lui demande d'être invariante par $\prod_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} \mathfrak{S}_{r_i}$ agissant sur

$$\{\lambda_\bullet = (\lambda_{i,j,k}) \in \prod_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} (\mathbb{C}^\times)^{r_i} \mid |\lambda_{i,j,k}| = 1\}$$

$$(\lambda_\bullet, g_1, g_2) \mapsto K_{\lambda_\bullet}^{G, \psi_x}(g_1, g_2)$$

telle que

- en les variables $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, $K_{\lambda_\bullet}^{G, \psi_x}(g_1, g_2)$ est invariante à droite par $K_x = K_{0,x}^G$,

- $\forall n_x \in N_B(F_x)$,

$$\begin{aligned} K_{\lambda_\bullet}^{G,\psi_x}(n_x g_1, g_2) &= \psi_x(n_x)^{-1} \cdot K_{\lambda_\bullet}^{G,\psi_x}(g_1, g_2), \\ K_{\lambda_\bullet}^{G,\psi_x}(g_1, n_x g_2) &= \psi_x(n_x) \cdot K_{\lambda_\bullet}^{G,\psi_x}(g_1, g_2), \end{aligned}$$

- pour toute fonction sphérique $h_x \in \mathcal{H}_{x,\phi}^G$, on a

$$K_{h_x}^{G,\psi_x}(g_1, g_2) = \int_{|\lambda_{i,j,k}|=1} d\lambda_\bullet \cdot S_x^G(h_x)(\lambda_\bullet) \cdot K_{\lambda_\bullet}^{G,\psi_x}(g_1, g_2).$$

(ii) Pour g_1 et g_2 fixés, cette fonction $K_{h_x}^{G,\psi_x}(g_1, g_2)$ est polynomiale en les variables $(\lambda_{i,j,k})_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x} \\ 1 \leq k \leq r_i}} = \lambda_\bullet$.

(iii) Lorsque la forme différentielle ω_X est régulière en la place x , on a

$$K_{\lambda_\bullet}^{G,\psi_x}(g_1, g_2) = c_x^{G,\psi_x}(\lambda_\bullet) \cdot W_{x,\lambda_\bullet}(g_1) \cdot \overline{W_{x,\lambda_\bullet}(g_2)}$$

avec

$$c_x^{G,\psi_x}(\lambda_\bullet) = \frac{\prod_{i \in I_G} \prod_{j \in I_{i,x}} \prod_{1 \leq k < k' \leq r_i} |\lambda_{i,j,k} - \lambda_{i,j,k'}|^2}{\prod_{i \in I_G} (r_i!)^{2|I_{i,x}|}}.$$

Démonstration. Si ψ_x et ψ'_x sont deux caractères de $N_B(F_x)$ associés à deux formes différentielles non nulles ω_X et ω'_X , il existe $\mu \in T_G(F_x)$ tel que la translation à gauche par μ

$$\varphi \mapsto \varphi' = (g \mapsto \varphi(\mu g))$$

définisse un isomorphisme de $\mathcal{L}_{K_x,\psi_x}(G(F_x))$ sur $\mathcal{L}_{K_x,\psi'_x}(G(F_x))$.

Il suffit donc de prouver les différentes assertions du corollaire dans le cas où la forme différentielle ω_X est régulière en la place x . Mais alors elles résultent de la proposition IV.4. \square

3 Convolution de deux noyaux de Whittaker locaux via un homomorphisme de transfert

Plaçons-nous maintenant dans la situation d'un homomorphisme de transfert (essentiellement injectif et non ramifié presque partout) général entre groupes linéaires :

$$\begin{array}{ccc} {}^L G & \xrightarrow{\rho} & {}^L H \\ & \searrow & \swarrow \\ & W_F & \end{array}$$

Comme toujours, on considère un sous-groupe ouvert $K = \prod_{x \in |X|} K_x$ de K_0^G , une partie finie S_0 de $|X|$ en dehors de laquelle G , H et ρ sont non ramifiés sur F et $K_x = K_{0,x}^G$, puis un sous-groupe ouvert $K' = \prod_{x \in |X|} K'_x$ de K_0^H tel que $K'_x = K_{0,x}^H$, $\forall x \notin S_0$, et que, en chaque place $x \in S_0$, K'_x soit assez petit en fonction de K_x et de la ramification de G , H et ρ .

Enfin, on choisit une partie finie $S \subset |X| - S_0$ assez grande pour vérifier les conclusions du Lemme II.2.

Considérons deux fonctions de Hecke $h \in \mathcal{H}_K^G/A_G$ et $h' \in \mathcal{H}_{K'}^H/A_H$. Si elles sont de la forme $h = \bigotimes_{x \in |X|} h_x$ et $h' = \bigotimes_{x \in |X|} h'_x$, on a les décompositions naturelles des “noyaux de Whittaker” des actions de h et h' sur $\mathcal{L}_{K, \psi_B}(N_B(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G)$ et $\mathcal{L}_{K', \psi_{B'}}(N_{B'}(F) \backslash H(\mathbb{A})/A_H)$:

$$K_h^{G, \psi_B}(g_1, g_2) = \prod_{x \in |X|} K_{h_x}^{G, \psi_x}(g_1, g_2),$$

$$K_{h'}^{H, \psi_{B'}}(g'_1, g'_2) = \prod_{x \in |X|} K_{h'_x}^{H, \psi_x}(g'_1, g'_2).$$

Et en toute place $x \in S$, on peut écrire d’après le Corollaire IV.5

$$K_{h_x}^{G, \psi_x}(g_1, g_2) = \int_{|\lambda_{i,j,k}|=1} d\lambda_\bullet \cdot S_x^G(h_x)(\lambda_\bullet) \cdot K_{\lambda_\bullet}^{G, \psi_x}(g_1, g_2)$$

et

$$K_{h'_x}^{H, \psi_x}(g'_1, g'_2) = \int_{|\lambda'_{i',j',k'}|=1} d\lambda'_\bullet \cdot S_x^H(h'_x)(\lambda'_\bullet) \cdot K_{\lambda'_\bullet}^{H, \psi_x}(g'_1, g'_2).$$

Souvenons-nous alors de l’énoncé du Lemme II.1 : Par composition avec les isomorphismes de Satake

$$\begin{aligned} S_x^G &: \mathcal{H}_{x,\phi}^G \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{i \in I_G \\ j \in I_{i,x}}} \mathbb{C}[X_{i,j,1}^{\pm 1}; \dots; X_{i,j,r_i}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_i}}, \\ \mathcal{H}_{x,\phi}^H &\xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{i' \in I_H \\ j' \in I_{i',x}}} \mathbb{C}[X_{i',j',1}^{\pm 1}; \dots; X_{i',j',r_{i'}}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_{i'}}}, \end{aligned}$$

l’homomorphisme d’algèbre induit par ρ en la place $x \in S$

$$\rho_x^*: \mathcal{H}_{x,\phi}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x,\phi}^G$$

peut s’écrire en substituant à chaque variable $X'_{i',j',k'}$ un monôme de la forme

$$\varepsilon_{i',j',k'} \cdot \prod_{\substack{i \in I_G, j \in I_{i,x} \\ 1 \leq k \leq r_i}} X_{i,j,k}^{\frac{1}{d_x} \cdot m_{i',j',k'}(i,j,k)}$$

où $d_x = \text{ppcm} \{[F_{x,i,j} : F_x], [F_{x,i',j'} : F_x]\}$ et les racines d_x -ièmes de l’unité $\varepsilon_{i',j',k'}$ ainsi que les multiplicités $m_{i',j',k'}(i,j,k)$ ne dépendent que de l’image de Frob_x dans n’importe quel quotient fini de W_F à travers lequel se factorise son action sur les ensembles $\{\iota : E_i \hookrightarrow \bar{F}\}$ et $\{\iota' : E_{i'} \hookrightarrow \bar{F}\}$.

Il est naturel de poser la définition suivante :

Définition IV.6. – *En toute place $x \in S$, on notera*

$$(K_{h_x}^{G, \psi_x} *_\rho K_{h'_x}^{H, \psi_x})(g_1, g_2; g'_1, g'_2)$$

la fonction de $g_1, g_2 \in G(F_x)$ et $g'_1, g'_2 \in H(F_x)$ qui s’obtient en appliquant l’opérateur d’intégration

$$\int_{|\lambda_{i,j,k}|=1} d\lambda_\bullet \cdot \left(\prod_{i' \in I_H} (r_{i'}!)^{|I_{i',x}|} \right)$$

à la fonction

$$S_x^G(h_x)(\lambda_\bullet) \cdot K_{\lambda_\bullet}^{G, \psi_x}(g_1, g_2) \cdot S_x^H(h'_x)(\lambda'_\bullet) \cdot K_{\lambda'_\bullet}^{H, \psi_x}(g'_1, g'_2)$$

où on pose les relations

$$\lambda'_{i',j',k'} = \varepsilon_{i',j',k'} \cdot \prod_{\substack{i \in I_G, j \in I_{i,x} \\ 1 \leq k \leq r_i}} \lambda_{i,j,k}^{\frac{1}{d_x} \cdot m_{i',j',k'}(i,j,k)}.$$

Pour les fonctions globales $h = \bigotimes_{x \in |X|} h_x$ et $h' = \bigotimes_{x \in |X|} h'_x$, on peut alors poser

$$\begin{aligned} (K_h^{G,\psi_B} *_{\rho,S} K_{h'}^{H,\psi_{B'}})(g_1, g_2; g'_1, g'_2) &= \prod_{x \in S} (K_{h_x}^{G,\psi_x} *_{\rho} K_{h'_x}^{H,\psi_x})(g_1, g_2; g'_1, g'_2) \\ &\cdot \prod_{x \in |X| - S} K_{h_x}^{G,\psi_x}(g_1, g_2) \cdot K_{h'_x}^{H,\psi_x}(g'_1, g'_2). \end{aligned}$$

La fonction sur $G(\mathbb{A})^2 \times H(\mathbb{A})^2$

$$(K_h^{G,\psi_B} *_{\rho,S} K_{h'}^{H,\psi_{B'}})(g_1, g_2; g'_1, g'_2)$$

est alors définie par bilinéarité pour toutes fonctions $h \in \mathcal{H}_K^G/A_G$, $h' \in \mathcal{H}_{K'}^H/A_H$.

Lorsque $H = G$ et que ρ est l'homomorphisme identique, on notera simplement

$$(K_h^{G,\psi_B} *_{\rho,S} K_{h_1}^{G,\psi_B})(g_1, g_2; g'_1, g'_2).$$

4 Une conjecture vague d'interversion d'une limite et d'une somme

Nous considérons toujours un homomorphisme de transfert

$${}^L G \rightarrow {}^L H$$

qui relie les groupes duaux de deux groupes linéaires G et H , mais nous supposons dans ce paragraphe que le groupe linéaire de départ G est abélien, c'est-à-dire de la forme $\prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{1_i}$. Nous pouvons supposer d'autre part que H a un seul facteur $\text{Res}_{E'/F} \text{GL}_r$.

Dans ce cadre, le Problème III.16 de l'exposé précédent nous a permis de définir un certain espace affine $\text{Fonct}_{K,K'}^{G,H}(\rho)$ de fonctionnelles bilinéaires en $h \in \mathcal{H}_K^G/A_G$ et $h' \in \mathcal{H}_{K'}^H/A_H$ tel que :

- Tout élément de $\text{Fonct}_{K,K'}^{G,H}(\rho)$ est de la forme

$$(h, h') \mapsto \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\text{aut},K}(G/A_G) \\ \pi' \in \Pi_{\text{aut},c}(H/A_H) \\ \pi' = \rho_* \pi}} c_{\pi} \cdot \text{Tr}_{\pi}(h) \cdot \text{Tr}_{\pi'}(h')$$

où les c_{π} sont des constantes qui valent 1 quand $\pi' = \rho_* \pi$ est une représentation cuspidale.

- Cet espace affine est engendré par les fonctionnelles de la forme

$$\begin{aligned} &\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \\ &\lim_{\substack{(1-Z_1) = c \cdot (1-Z) \\ Z, Z_1 \mapsto 1}} (1-Z_1) \cdot \sum_{N \in \mathbb{N}} Z_1^N \cdot \text{vol}(H(F) \backslash H(\mathbb{A})/A_H) \cdot \text{Moyenne}_{\text{deg}_Q(g')=N} \\ &[K^G(g, g) \times \Lambda_1 \Lambda_2 K^H(g', g')]((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z)) \end{aligned}$$

où c est une constante multiplicative et $\Delta_S^{G,H}(Z) = \bigotimes_{x \in S} \Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z)$ est un élément central de $(\mathcal{H}_K^G \otimes \mathcal{H}_{K'}^H)[[Z]]$ dont les facteurs $\Delta_x^{G,H}(\bullet, \bullet, Z)$ vérifient les hypothèses du Lemme II.3.

D'autre part, la fonctionnelle bilinéaire en $h, h_1 \in \mathcal{H}_K^G/A_G$

$$(h, h_1) \mapsto \text{Diag}_{K, \text{aut}}^G(h, h_1) = \sum_{\pi \in \Pi_{\text{aut}, K}(G(\mathbb{A})/A_G)} \text{Tr}_\pi(h) \cdot \text{Tr}_\pi(h_1)$$

admet pour expression géométrique

$$\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G) \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} (h * h_1)(\gamma).$$

Dans l'énoncé du Problème II.16, on a dit qu'on doit pouvoir montrer que l'espace affine $\text{Fonct}_{K, K'}^{G, H}(\rho)$ contient une fonctionnelle bilinéaire en $h \in \mathcal{H}_K^G/A_G$ et $h' \in \mathcal{H}_{K'}^H/A_H$ égale à

$$(h, h') \mapsto \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\text{aut}, K}(G/A_G) \\ \pi' \in \Pi_{\text{aut}, c, K'}(H/A_H) \\ \pi' = \rho_* \pi}} \text{Tr}_\pi(h) \cdot \text{Tr}_{\pi'}(h').$$

Quoi qu'il en soit, pour montrer le principe de functorialité entre G et H , il suffirait de prouver que la fonctionnelle bilinéaire

$$(h, h') \mapsto \text{Diag}_{K, \text{cusp}}^G(h, \rho^* h')$$

est élément de l'espace affine $\text{Fonct}_{K, K'}^{G, H}(\rho)$.

Rappelons enfin que pour tout entier N , on a la formule de la Proposition IV.1 :

$$\begin{aligned} & \int_{Q(F) \backslash H(\mathbb{A})/A_H} dg' \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g') = N) \cdot \Lambda_1 \Lambda_2 K_{h'}^H(g', g') \\ &= \sum_{\underline{r}} \sum_{\gamma' \in T_{\underline{r}}(F)} \int_{N_{\underline{r}}(\mathbb{A}) \backslash H(\mathbb{A})/A_H \cdot Z_H(F)} dg' \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g') = N) \cdot K_{h'}^{H, \psi_B}(g', \gamma' \cdot w_{\underline{r}}^{-1} \cdot g') \end{aligned}$$

où \underline{r} décrit l'ensemble des partitions de r , $w_{\underline{r}}$ est la famille de matrices de permutations associée, et $T_{\underline{r}} \subseteq T_H$ est le sous-tore diagonal associé.

La seule partition pour laquelle $T_{\underline{r}} = T_H$ est celle en intervalles de longueur 1. Il lui correspond l'élément $w_{\underline{r}} = w_0$ dont toutes les composantes sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & \ddots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 1 & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Et c'est aussi la seule partition pour laquelle le groupe unipotent associé $N_{\underline{r}}$ est trivial. La contribution associée à cette partition est :

$$\sum_{\gamma' \in T_H(F)} \int_{H(\mathbb{A})/A_H \cdot Z_H(F)} dg' \cdot \mathbf{1}(\deg_Q(g') = N) \cdot K_{h'}^{H, \psi_B}(g', \gamma' \cdot w_0 \cdot g').$$

Prenons le risque de proposer la conjecture suivante :

Conjecture IV.7. – Si ${}^L G \xrightarrow{\rho} {}^L H$ est un homomorphisme de transfert essentiellement injectif qui relie deux groupes algébriques linéaires G et H dont le premier est abélien et le second a un seul facteur, il existe dans l'espace affine

$$\text{Fonct}_{K,K'}^{G,H}(\rho)$$

une fonctionnelle bilinéaire en $h \in \mathcal{H}_K^G/A_G$, $h' \in \mathcal{H}_{K'}^H/A_H$, qui a la forme suivante

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \text{Moyenne}_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \gamma' \in T_H(F)}} \int_{H(\mathbb{A})/Z_H(\mathbb{A})} dg' \cdot q^{-\deg_Q(g')} \cdot (K_h^G *_{\rho,S} K_{h'}^{H,\psi_B})(g, \gamma g; g', \gamma' w_0 g')$$

où :

- la fonctionnelle d'intégration $\int_{H(\mathbb{A})/Z_H(\mathbb{A})} dg'$ est le produit infini sur toutes les places des mesures de Haar locales $\int_{H(F_x)/Z_H(F_x)} dg'_x$ multipliées par des constantes de convergence c_x ,
- Moyenne (...) est une fonctionnelle linéaire bien définie sur un espace de fonctions continues en $\mu \in G(\mathbb{A})$ et $\mu' \in T_H(\mathbb{A})$ comprenant les

$$(\mu, \mu') \mapsto \int_{H(\mathbb{A})/Z_H(\mathbb{A})} dg' \cdot q^{-\deg_Q(g')} \cdot (K_h^G *_{\rho,S} K_{h'}^{H,\psi_B})(g, \mu g; g', \mu' w_0 g'),$$

qui ne dépend que des valeurs de ces fonctions en les éléments rationnels $\gamma \in G(F)$, $\gamma' \in T_H(F)$, et qui est invariante par translation par $G(F) \times T_H(F)$.

(ii) Si $G = H$ est un groupe linéaire arbitraire, la fonctionnelle bilinéaire en $h, h' \in \mathcal{H}_K^G/A_G$

$$(h, h_1) \mapsto \text{Diag}_{K,\text{cusp}}^G(h, h_1) = \sum_{\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(G/A_G)} \text{Tr}_{\pi}(h) \cdot \text{Tr}_{\pi}(h_1)$$

a la même forme que dans (i), à condition de remplacer partout $(K_h^{G,\psi_B} *_{\rho,S} K_{h'}^{H,\psi_B})$ par $(K_h^{G,\psi_B} *_{\rho,S} K_{h'}^{H,\psi_B})$.

Remarques.

(1) La première partie de la conjecture consiste à supposer que dans les moyennes formelles qu'on doit calculer pour obtenir les fonctionnelles bilinéaires éléments de $\text{Fonct}_{K,K'}^{G,H}(\rho)$, toutes les sommes indexées par les partitions \underline{r}

$$\sum_{\gamma' \in T_{\underline{r}}(F)} \dots$$

disparaissent, sauf celle qui correspond à la partition la plus fine pour laquelle $T_{\underline{r}} = T_H$.

On est amené à le penser du fait que pour les autres partitions \underline{r} , les ensembles $T_{\underline{r}}(F)$ sur lesquels on somme sont "beaucoup plus petits" que $T_H(F)$.

Il est facile de montrer cette partie de la conjecture dans le cas de l'induction automorphe quadratique de GL_1 à GL_2 .

(2) L'espace affine $\text{Fonct}_{K,K'}^{G,H}(\rho)$ est engendré par des fonctionnelles de la forme

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})/A_G} dg \cdot \lim_{\substack{(1-Z_1)^{-c} \\ Z, Z_1 \rightarrow 1}} (1-Z_1) \cdot \sum_{N \in \mathbb{N}} Z_1^N \cdot \text{vol}(H(F) \backslash H(\mathbb{A})/A_H) \cdot \text{Moyenne}_{\deg_Q(g')=N} [K^G(g, g) \times \Lambda_1 \Lambda_2 K^H(g', g')]((h \otimes h') * \Delta_S^{G,H}(Z)).$$

Si, dans cette expression, on remplace

$$[K^G(g, g) \times \Lambda_1 \Lambda_2 K^H(g', g')](\dots)$$

par

$$[K^G(g, g) \times \Lambda_1 \Lambda_2 K^H(g'k', g'k')](\dots)$$

avec $k' \in K_0^H$, la valeur de la fonctionnelle reste inchangée. Et si on remplace plutôt ce terme par

$$[K^G(g, g) \times \Lambda_1 \Lambda_2 K^H(g'_0 g', g'_0 g')](\dots)$$

avec $g'_0 \in Q(\mathbb{A})$, la valeur de la fonctionnelle est multipliée par

$$q^{\deg_Q(g'_0)}.$$

C'est pourquoi la dépendance en g' de toutes les fonctionnelles éléments de $\text{Fonct}_{K, K'}^{G, H}(\rho)$ est nécessairement de la forme

$$\int_{H(\mathbb{A})/Z_H(\mathbb{A})} dg' \cdot q^{-\deg_Q(g')} \dots$$

(3) A partir du moment où on a conjecturé que les sommes

$$\sum_{\gamma' \in T_{\mathbf{x}}(F)} \dots$$

ne donnent pas de contribution quand $T_{\mathbf{r}} \neq T_H$, on peut ne retenir dans les expressions de tous les coefficients des séries formelles

$$\text{Moyenne}_{\deg_Q(g')=N} [K^G(g, g) \times \Lambda_1 \Lambda_2 K^H(g', g')](h \otimes h') * \Delta_S^{G, H}(Z)$$

que la partie qui correspond à $w_{\mathbf{r}} = w_0$, qui s'écrit comme une somme sur les $\gamma' \in T_H(F)$.

Alors toute fonctionnelle de $\text{Fonct}_{K, K'}^{G, H}(\rho)$ s'obtient nécessairement en appliquant une fonctionnelle du type

$$\text{Moyenne}_{\gamma \in G(F), \gamma' \in T_H(F)}$$

à une certaine fonction de $\mu \in G(\mathbb{A})$ et $\mu' \in T_H(\mathbb{A})$.

Mais bien sûr il faudra définir de manière plus précise cette fonctionnelle de moyenne sur les éléments rationnels.

(4) Tous les éléments de $\text{Fonct}_{K, K'}^{G, H}(\rho)$ sont des fonctionnelles linéaires sur $\mathcal{H}_K^G/A_G \otimes \mathcal{H}_{K'}^H/A_H$. D'après leur expression spectrale, ces fonctionnelles s'annulent sur tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{H}_K^G/A_G \otimes \mathcal{H}_{K'}^H/A_H$ qui contiennent en facteur un élément de

$$\mathcal{H}_{x, \phi}^G \otimes \mathcal{H}_{x, \phi}^H \quad (\text{avec } x \in S)$$

qui est annulé par l'homomorphisme

$$\text{Id} \otimes \rho_x^* : \mathcal{H}_{x, \phi}^G \otimes \mathcal{H}_{x, \phi}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x, \phi}^G.$$

D'autre part, si $h = \bigotimes_{x \in |X|} h_x$ et $h' = \bigotimes_{x \in |X|} h'_x$, la série formelle

$$[K^G(g, \mu g) \times K^{H, \psi_B}(g', \mu' w_0 g')](h \otimes h') * \Delta_S^{G, H}(Z)$$

s'écrit comme un produit sur les $x \notin S$ des

$$K_{h_x}^G(g, \mu g) \cdot K_{h'_x}^{H, \psi_x}(g', \mu' w_0 g')$$

et sur les $x \in S$ des

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda_{i,j,1}|=1} d\lambda_{\bullet} \cdot \int_{|\lambda'_{1,j',k'}|=1} d\lambda'_{\bullet} \cdot \Delta_x^{G,H}(\lambda_{\bullet}, \lambda'_{\bullet}, Z) \\ \cdot S_x^G(h_x)(\lambda_{\bullet}) \cdot K_{\lambda_{\bullet}}^{G,\psi_x}(g, g) \\ \cdot S_x^H(h'_x)(\lambda'_{\bullet}) \cdot K_{\lambda'_{\bullet}}^{H,\psi_x}(g', g'). \end{aligned}$$

En passant aux limites formelles qui définissent les éléments de $\text{Fonct}_{K,K'}^{G,H}(\rho)$, on voit que rien ne change en les places $x \notin S$.

Et en les places $x \in S$, le résultat ne dépend plus que des expressions

$$S_x^G(h_x)(\lambda_{\bullet}) \cdot K_{\lambda_{\bullet}}^{G,\psi_x}(g, g) \cdot S_x^H(h'_x)(\lambda'_{\bullet}) \cdot K_{\lambda'_{\bullet}}^{H,\psi_x}(g', g')$$

restreintes au fermé défini par les relations

$$\lambda'_{1,j',k'} = \varepsilon_{1,j',k'} \cdot \prod_{i \in I_G, j \in I_{i,x}} \lambda_{i,j,k}^{\frac{1}{d_x} \cdot m_{1,j',k'}(i,j,1)}.$$

Le problème est de déterminer quelle mesure intervient sur le produit en les places $x \in S$ des produits de cercles

$$\{\lambda_{\bullet} = (\lambda_{i,j,1})_{i \in I_G, j \in I_{i,x}} : |\lambda_{i,j,1}| = 1, \forall i, j\}.$$

Ces mesures en les places $x \in S$ dépendent nécessairement de l'élément de $\text{Fonct}_{K,K'}^{G,H}(\rho)$ considéré (puisque tout le reste n'en dépend pas).

La partie principale de la conjecture consiste à supposer qu'il existe dans $\text{Fonct}_{K,K'}^{G,H}(\rho)$ un élément pour lequel la mesure associée est le produit sur les places $x \in S$ des mesures de Haar $d\lambda_{\bullet}$. \square

Si la conjecture était vraie, l'étape suivante consisterait bien sûr à essayer de calculer les moyennes sur les éléments rationnels de nos tores maximaux puis de démontrer l'égalité des deux fonctionnelles

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G} dg \cdot \text{Moyenne}_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \gamma' \in \mathcal{T}_H(F)}} \int_{H(\mathbb{A}) / Z_H(\mathbb{A})} dg' \cdot q^{-\deg_Q(g')} \cdot (K_h^G *_{\rho, S} K_{h'}^{H,\psi_B})(g, \gamma g; g', \gamma' w_0 g')$$

et

$$\text{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / A_G) \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} (h * h_1)(\gamma)$$

lorsque $h_1 = \rho^* h'$.

Exposé V :

Des calculs géométriques et une conjecture dans le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2 ou GL_r

Dans les six premiers paragraphes du présent exposé, on se place dans le cas non abélien le plus simple de la functorialité de Langlands entre groupes linéaires : l'induction automorphe quadratique de GL_1 à GL_2 .

On calcule complètement dans ce cas les “noyaux locaux convolés”

$$K_{h_x}^G *_{\rho} K_{h'_x}^{H, \psi_x}$$

qui ont été définis dans le précédent Exposé IV, puis les intégrales locales

$$I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta, (\gamma_1, \gamma_2)) = \int_{GL_2(F_x)/F_x^{\times}} dg_x \cdot q^{-\deg_Q(g_x)} \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{h'_x}^{H, \psi_x}) \left(\delta, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot g_x, g_x \right)$$

comme fonctions de $\delta \in E_x^{\times}$ et $(\gamma_1, \gamma_2) \in (F_x^{\times})^2$, puis les coefficients de Fourier de ces fonctions.

Il apparaît que les coefficients de Fourier qui correspondent à des caractères invariants par le plongement $F_x^{\times} \hookrightarrow (F_x^{\times})^2 : \gamma \mapsto (\gamma, \gamma^{-1})$ vérifient de remarquables propriétés d'annulation (et de non annulation pour certaines fonctions h_x et h'_x bien particulières).

Cela conduit à formuler dans le dernier paragraphe une conjecture qui complète la Conjecture IV.7 de l'Exposé IV dans le cas de l'induction automorphe de $G = \text{Res}_{E/F} GL_1$ à $H = GL_r$ via une extension E de F de degré r partout non ramifiée (ou plus généralement dans le cas de tout transfert automorphe d'un groupe linéaire abélien partout non ramifié $G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} GL_1$ à un groupe $H = GL_r$).

Cette conjecture propose une formule explicite pour le calcul de la fonctionnelle

$$\sum_{\substack{\chi \in \Pi_{\text{aut}, K_0^G}^G(G(\mathbb{A})/A_G) \\ \pi \in \Pi_{\text{aut}, K_0^H}^H(H(\mathbb{A})/A_H) \\ \pi = \rho_* \chi}} \text{Tr}_{\chi}(h) \cdot \text{Tr}_{\pi}(h')$$

du côté géométrique.

Si cette conjecture était vraie, elle réduirait la vérification du transfert automorphe non ramifié de G à H à la vérification d'une famille d'identités locales indexées par toutes les places.

Dans un prochain travail, nous généraliserons cette conjecture au cadre de la functorialité de Langlands entre deux groupes algébriques linéaires arbitraires sur un corps de fonctions.

Cela nous amènera à reprendre partiellement l'étude que nous avons déjà faite du côté spectral, pour développer une variante de notre première approche.

1 Le cas de l'induction automorphe quadratique de GL_1 à GL_2

Nous nous plaçons dans la continuation de l'Exposé IV, dont nous allons utiliser les notations. Notre but est de calculer dans le cas le plus simple de transfert automorphe non abélien les différentes expressions générales qui ont été introduites dans l'Exposé IV.

Considérons donc le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2 via une extension quadratique séparée E de F , avec

$$G = \mathrm{Res}_{E/F} \mathrm{GL}_1 \quad \text{et} \quad H = \mathrm{GL}_2.$$

En toute place $x \in |X|$, l'isomorphisme de Satake pour H s'écrit

$$S_x^H : \mathcal{H}_{x,\phi}^H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X'_1, X'_2]^{\mathfrak{S}_2}.$$

Notons $|X|_+$ l'ensemble des places x où l'extension E de F est scindée et $|X|_-$ celui où l'extension E est inerte et non ramifiée. L'isomorphisme de Satake pour G s'écrit

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\phi}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1, X_2]$$

en les places $x \in |X|_+$, et

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\phi}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X^2] = \mathbb{C}[X, -X]^{\mathfrak{S}_2}$$

en les places $x \in |X|_-$.

Dans ce paragraphe, et avec les notations de l'Exposé IV, nous voulons calculer les fonctions locales

$$K_{h_x}^G *_{\rho} K_{h'_x}^{H,\psi'_x} = K_{h_x *_{\rho^*} (h'_x)}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H,\psi'_x}$$

sur $G(F_x)^2 \times H(F_x)^2$, en toute place x où E est non ramifiée, et pour toutes fonctions sphériques $h_x \in \mathcal{H}_{x,\phi}^G$ et $h'_x \in \mathcal{H}_{x,\phi}^H$. Il suffit de le faire dans le cas où h'_x est l'unité $\mathbf{1}_x$ de $\mathcal{H}_{x,\phi}^H$.

On commence par le cas où la place x est décomposée dans E :

Proposition V.1. – *Soit $x \in |X|_+$ une place où E est scindée et où, de plus, la forme différentielle ω_X est régulière.*

Soit $h_x \in \mathcal{H}_{x,\phi}^G$ une fonction sphérique dont la transformée de Satake est de la forme

$$S_x^G(h_x) = X_1^{-k_2} \cdot X_2^{-k_2}.$$

Alors la fonction

$$(K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H,\psi_x})((t', t); (g', g))$$

des éléments $t = (t_1, t_2)$, $t' = (t'_1, t'_2)$ de $E_x^\times = F_x^\times \times F_x^\times$ et $g = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot k$,

$g' = \begin{pmatrix} 1 & u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu'_1 & 0 \\ 0 & \mu'_2 \end{pmatrix} \cdot k'$ de $\mathrm{GL}_2(F_x)$ ne prend des valeurs non nulles que dans la zone définie par

$$\begin{cases} v_x \begin{pmatrix} t'_1 & t'_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} + v_x \begin{pmatrix} \mu'_1 & \mu'_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} = k_1 + k_2, \\ v_x(\mu_1) \geq v_x(\mu_2), \\ v_x(\mu'_1) \geq v_x(\mu'_2). \end{cases}$$

Et dans cette zone, elle vaut suivant les cas

• $\psi_x(u) \cdot \psi_x(u')^{-1} \cdot q_x^{\frac{1}{2} v_x \begin{pmatrix} \mu_2 & \mu'_2 \\ \mu_1 & \mu'_1 \end{pmatrix}}$ si

$$v_x \begin{pmatrix} t'_1 \\ t_1 \end{pmatrix} + v_x \begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = k_1 \quad \left(\Leftrightarrow \quad v_x \begin{pmatrix} t'_2 \\ t_2 \end{pmatrix} + v_x \begin{pmatrix} \mu'_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = k_2 \right),$$

et

$$v_x \left(\frac{t'_1}{t_1} \right) + v_x \left(\frac{\mu'_2}{\mu_2} \right) = k_1 \quad \left(\Leftrightarrow \quad v_x \left(\frac{t'_2}{t_2} \right) + v_x \left(\frac{\mu'_1}{\mu_1} \right) = k_2 \right),$$

• $\frac{1}{2} \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x(u')^{-1} \cdot q_x^{\frac{1}{2} v_x \left(\frac{\mu_2 \mu'_2}{\mu_1 \mu'_1} \right)}$ si l'une de ces deux égalités est vérifiée et pas l'autre,

• $-\frac{1}{2} \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x(u')^{-1} \cdot q_x^{\frac{1}{2} v_x \left(\frac{\mu_2 \mu'_2}{\mu_1 \mu'_1} \right)}$ si

$$v_x \left(\frac{t'_1}{t_1} \right) + v_x \left(\frac{\mu'_1}{\mu_2} \right) + 1 = k_1 \quad \left(\Leftrightarrow \quad v_x \left(\frac{t'_2}{t_2} \right) + v_x \left(\frac{\mu'_2}{\mu_1} \right) - 1 = k_2 \right)$$

ou bien

$$v_x \left(\frac{t'_1}{t_1} \right) + v_x \left(\frac{\mu'_2}{\mu_1} \right) - 1 = k_1 \quad \left(\Leftrightarrow \quad v_x \left(\frac{t'_2}{t_2} \right) + v_x \left(\frac{\mu'_1}{\mu_2} \right) + 1 = k_2 \right),$$

• 0 dans tous les autres cas.

Démonstration. L'intégrale qui définit la fonction

$$(K_{h_x}^G *_{\rho} K_{1_x}^{H, \psi_x})((t', t); (g', g))$$

est égale à

$$\int_{|\lambda_1|=1=|\lambda_2|} d\lambda_1 \cdot d\lambda_2 \cdot \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}{2} \cdot \lambda_1^{-k_1} \cdot \lambda_2^{-k_2} \cdot W_{x, \lambda_{\bullet}}(t') \cdot \overline{W_{x, \lambda_{\bullet}}(t)} \cdot W'_{x, \lambda_{\bullet}}(g') \cdot \overline{W'_{x, \lambda_{\bullet}}(g)},$$

avec

$$W_{x, \lambda_{\bullet}}(t') = \lambda_1^{v_x(t'_1)} \cdot \lambda_2^{v_x(t'_2)},$$

$$W_{x, \lambda_{\bullet}}(t) = \lambda_1^{v_x(t_1)} \cdot \lambda_2^{v_x(t_2)},$$

$$W'_{x, \lambda_{\bullet}}(g') = \psi(u')^{-1} \cdot q_x^{\frac{v_x(\mu'_2) - v_x(\mu'_1)}{2}} \cdot \sum_{\substack{n'_1 + n'_2 = v_x(\mu'_1 \mu'_2) \\ v_x(\mu'_1) \geq n'_1, n'_2 \geq v_x(\mu'_2)}} \lambda_1^{n'_1} \cdot \lambda_2^{n'_2},$$

$$W'_{x, \lambda_{\bullet}}(g) = \psi(u)^{-1} \cdot q_x^{\frac{v_x(\mu_2) - v_x(\mu_1)}{2}} \cdot \sum_{\substack{n_1 + n_2 = v_x(\mu_1 \mu_2) \\ v_x(\mu_1) \geq n_1, n_2 \geq v_x(\mu_2)}} \lambda_1^{n_1} \cdot \lambda_2^{n_2}.$$

Enfin, comme $|\lambda_1| = 1 = |\lambda_2|$, on a

$$\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}{2} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})}{2} = \frac{2 - \lambda_1 \lambda_2^{-1} - \lambda_2 \lambda_1^{-1}}{2}.$$

Par conséquent, notre intégrale est égale au produit de

$$\frac{1}{2} \cdot \psi(u) \cdot \psi(u')^{-1} \cdot q_x^{\frac{1}{2} v_x \left(\frac{\mu_2 \mu'_2}{\mu_1 \mu'_1} \right)}$$

et de

$$2 \cdot \# \left\{ \begin{array}{l} (n_1, n_2) \left| \begin{array}{l} n_1 + n_2 = v_x(\mu_1 \mu_2) \\ v_x(\mu_1) \geq n_1, n_2 \geq v_x(\mu_2) \end{array} \right. \\ (n'_1, n'_2) \left| \begin{array}{l} n'_1 + n'_2 = v_x(\mu'_1 \mu'_2) \\ v_x(\mu'_1) \geq n'_1, n'_2 \geq v_x(\mu'_2) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left. \left\{ \begin{array}{l} v_x(t'_1) - v_x(t_1) + n'_1 - n_1 = k_1 \\ v_x(t'_2) - v_x(t_2) + n'_2 - n_2 = k_2 \end{array} \right. \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\# \left\{ \begin{array}{l} (n_1, n_2) \\ (n'_1, n'_2) \end{array} \left| \begin{array}{l} n_1 + n_2 = v_x(\mu_1 \mu_2) \\ v_x(\mu_1) \geq n_1, n_2 \geq v_x(\mu_2) \\ n'_1 + n'_2 = v_x(\mu'_1 \mu'_2) \\ v_x(\mu'_1) \geq n'_1, n'_2 \geq v_x(\mu'_2) \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \text{et} \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} v_x(t'_1) - v_x(t_1) + n'_1 - n_1 = k_1 + 1 \\ \\ \\ v_x(t'_2) - v_x(t_2) + n'_2 - n_2 = k_2 - 1 \end{array} \right\} \\
& -\# \left\{ \begin{array}{l} (n_1, n_2) \\ (n'_1, n'_2) \end{array} \left| \begin{array}{l} n_1 + n_2 = v_x(\mu_1 \mu_2) \\ v_x(\mu_1) \geq n_1, n_2 \geq v_x(\mu_2) \\ n'_1 + n'_2 = v_x(\mu'_1 \mu'_2) \\ v_x(\mu'_1) \geq n'_1, n'_2 \geq v_x(\mu'_2) \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \text{et} \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} v_x(t'_1) - v_x(t_1) + n'_1 - n_1 = k_1 - 1 \\ \\ \\ v_x(t'_2) - v_x(t_2) + n'_2 - n_2 = k_2 + 1 \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Ces trois cardinaux ne peuvent être non nuls que si

$$v_x \left(\frac{t'_1 t'_2}{t_1 t_2} \right) + v_x \left(\frac{\mu'_1 \mu'_2}{\mu_1 \mu_2} \right) = k_1 + k_2,$$

et sous cette condition, le premier des trois par exemple est égal à

$$\# \left\{ \begin{array}{l} n_1 \\ n'_1 \end{array} \left| \begin{array}{l} v_x(\mu_1) \geq n_1 \geq v_x(\mu_2) \\ v_x(\mu'_1) \geq n'_1 \geq v_x(\mu'_2) \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \text{et} \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} v_x(\mu'_1) - v_x(\mu_1) + n'_1 - n_1 = k_1 \end{array} \right\}.$$

On conclut la démonstration en invoquant le lemme élémentaire suivant :

Lemme V.2. – Pour tous entiers m_1, m_2, m'_1, m'_2 , la différence des cardinaux

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \# \left\{ n \in \mathbb{Z} \left| \begin{array}{l} m_1 \geq n \geq m_2 \\ m'_1 \geq n \geq m'_2 \end{array} \right. \right\} \\
& - \# \left\{ n \in \mathbb{Z} \left| \begin{array}{l} m_1 \geq n \geq m_2 \\ m'_1 - 1 \geq n \geq m'_2 - 1 \end{array} \right. \right\} \\
& - \# \left\{ n \in \mathbb{Z} \left| \begin{array}{l} m_1 \geq n \geq m_2 \\ m'_1 + 1 \geq n \geq m'_2 + 1 \end{array} \right. \right\}
\end{aligned}$$

ne peut être non nulle que si $m_1 \geq m_2$ et $m'_1 \geq m'_2$. Dans ce cas, elle vaut

- 2 si $m_1 = m'_1$ et $m_2 = m'_2$,
- 1 si $m_1 = m'_1$ et $m_2 \neq m'_2$,
- 1 si $m_1 \neq m'_1$ et $m_2 = m'_2$,
- -1 si $m'_1 = m_2 - 1$,
- -1 si $m_1 = m'_2 - 1$,

- 0 dans tous les autres cas.

□

Passons maintenant aux places x où l'extension E est inerte et non ramifiée :

Proposition V.3. – Soit $x \in |X|_-$ une place où E est inerte et non ramifiée, et où, de plus, la forme différentielle ω_X est régulière.

Soit $h_x \in \mathcal{H}_{x,\phi}^G$ une fonction sphérique dont la transformée de Satake est de la forme

$$S_x^G(h_x) = X^{-2k_0}.$$

Alors la fonction

$$(K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H,\psi_x})((t', t); (g', g))$$

des éléments t, t' de E_x^\times et $g = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot k$, $g' = \begin{pmatrix} 1 & u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu'_1 & 0 \\ 0 & \mu'_2 \end{pmatrix} \cdot k'$ de $\mathrm{GL}_2(F_x)$ ne prend des valeurs non nulles que dans la zone définie par

$$\begin{cases} v_x \circ \mathrm{Nm} \left(\frac{t'}{t} \right) + v_x \left(\frac{\mu'_1 \mu'_2}{\mu_1 \mu_2} \right) = 2k_0, \\ v_x(\mu_1) - v_x(\mu_2) \in 2\mathbb{N}, \\ v_x(\mu'_1) - v_x(\mu'_2) \in 2\mathbb{N}, \end{cases}$$

et dans cette zone elle vaut

$$\psi(u) \cdot \psi(u')^{-1} \cdot q_x^{\frac{1}{2}v_x\left(\frac{\mu_2 \mu'_2}{\mu_1 \mu'_1}\right)} \cdot (-1)^{v_x(\mu_2 \mu'_2)}.$$

Démonstration. L'intégrale qui définit la fonction

$$(K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H,\psi_x})((t', t); (g', g))$$

est égale à

$$\int_{|\lambda_0|=1} d\lambda_0 \cdot \lambda_0^{-2k_0} \cdot W_{x,\lambda_0}(t') \cdot W_{x,\lambda_0}(t) \cdot W_{x,(\lambda_0,-\lambda_0)}(g') \cdot \overline{W_{x,(\lambda_0,-\lambda_0)}(g)}$$

avec

$$W_{x,\lambda_0}(t') = \lambda_0^{v_x \circ \mathrm{Nm}(t')},$$

$$W_{x,\lambda_0}(t) = \lambda_0^{v_x \circ \mathrm{Nm}(t)},$$

$$W_{x,(\lambda_0,-\lambda_0)}(g') = \psi(u')^{-1} \cdot q_x^{\frac{v_x(\mu'_2) - v_x(\mu'_1)}{2}} \cdot \sum_{\substack{n'_1 + n'_2 = v_x(\mu'_1 \mu'_2) \\ v_x(\mu'_1) \geq n'_1, n'_2 \geq v_x(\mu'_2)}} \lambda_0^{n'_1} \cdot (-\lambda_0)^{n'_2},$$

$$W_{x,(\lambda_0,-\lambda_0)}(g) = \psi(u)^{-1} \cdot q_x^{\frac{v_x(\mu_2) - v_x(\mu_1)}{2}} \cdot \sum_{\substack{n_1 + n_2 = v_x(\mu_1 \mu_2) \\ v_x(\mu_1) \geq n_1, n_2 \geq v_x(\mu_2)}} \lambda_0^{n_1} \cdot (-\lambda_0)^{n_2}.$$

Par conséquent, notre intégrale est égale au produit de

$$\psi(u) \cdot \psi(u')^{-1} \cdot q_x^{\frac{1}{2}v_x\left(\frac{\mu_2 \mu'_2}{\mu_1 \mu'_1}\right)}$$

et de

$$\sum_{(n_1, n_2), (n'_1, n'_2)} (-1)^{n_2 + n'_2}$$

où les (n_1, n_2) et (n'_1, n'_2) sont soumis aux conditions

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = v_x(\mu_1 \mu_2), \\ v_x(\mu_1) \geq n_1, n_2 \geq v_x(\mu_2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} n'_1 + n'_2 = v_x(\mu'_1 \mu'_2) \\ v_x(\mu'_1) \geq n'_1, n'_2 \geq v_x(\mu'_2), \end{cases}$$

et

$$v_x \circ \text{Nm}(t') - v_x \circ \text{Nm}(t) + (n'_1 + n'_2) - (n_1 + n_2) = 2k_0.$$

On en déduit l'énoncé de la proposition. \square

2 Préparation au calcul des intégrales locales

Nous nous plaçons toujours dans le même cadre : celui de l'induction automorphe de $G = \text{Res}_{E/F} \text{GL}_1$ à $H = \text{GL}_2$ via une extension quadratique séparée E de F .

Nous allons continuer les calculs locaux en une place $x \in |X|$ où E est non ramifiée sur F et où la forme différentielle ω_X est régulière. On rappelle que w_0 désigne la matrice de transposition $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On considère une fonction sphérique

$$h_x \in \mathcal{H}_{x, \phi}^G,$$

et on s'intéresse aux intégrales locales

$$\int_{H(F_x)/Z_H(F_x)} dg \cdot q^{-\deg_Q(g)} \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x})(\delta, 1; \gamma w_0 g, g)$$

comme fonction de $\delta \in E_x^{\times}$ et de $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in T_H(F_x) = F_x^{\times} \times F_x^{\times}$.

On a d'abord le lemme général suivant :

Lemme V.4. – *Dans les conditions ci-dessus, on a :*

(i) *Pour tous $\delta \in E_x^{\times}$ et $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in T_H(F_x) = F_x^{\times} \times F_x^{\times}$, l'intégrale*

$$\int_{H(F_x)/Z_H(F_x)} dg \cdot q^{-\deg_Q(g)} \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x})(\delta, 1; \gamma w_0 g, g)$$

est égale à

$$\int_{H(F_x)/Z_H(F_x)} dg \cdot q^{-\deg_Q(g)} \cdot (K_{h_x^{\delta}}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x})(1, 1; \gamma w_0 g, g)$$

si $h_x^{\delta} : t \mapsto h_x(\delta \cdot t)$ désigne la fonction sphérique déduite de h_x par translation par δ .

(ii) *Pour tous $\delta \in E_x^{\times}$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in T_H(F_x) = F_x^{\times} \times F_x^{\times}$ et $\gamma_0 \in Z_H(F_x) = F_x^{\times}$, l'intégrale*

$$\int_{H(F_x)/Z_H(F_x)} dg \cdot q^{-\deg_Q(g)} \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x})(\delta, 1; \gamma_0 \gamma w_0 g, g)$$

est égale à

$$\int_{H(F_x)/Z_H(F_x)} dg \cdot q^{-\deg_Q(g)} \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x})(\gamma_0 \delta, 1; \gamma w_0 g, g).$$

Démonstration. C'est immédiat sur la formule de définition de $K_{h_x}^G *_{\rho} K_{1_x}^{H, \psi_x}$ dans la Définition IV.6. \square

Ce lemme permettra de limiter les calculs au cas où $\delta = 1$ et où le support de h_x est contenu dans $\{t \in E_x^{\times} \mid v_x(\text{Nm}(t)) = 0 \text{ ou } 1\}$.

Examinons maintenant l'intégrale locale associée ci-dessus à h_x , δ et γ .

Les éléments $g \in H(F_x)/Z_H(F_x)$ s'écrivent sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot k$$

avec $k \in \text{GL}_2(O_x)$, $u \in F_x$, $\mu \in F_x^{\times}$,

$$dg = d\mu \cdot du \cdot dk,$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d(\mu u) = |\mu| \cdot du = q^{\deg(\mu)} \cdot du = q^{\deg_Q(g)} \cdot du,$$

si bien que notre intégrale locale est égale à

$$\int_{F_x^{\times}} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{1_x}^{H, \psi_x}) \left(\delta, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme $w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(O_x)$, on calcule

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot w_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ \gamma_2 u & \mu \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

C'est encore égal à

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \mu \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{u}{\mu} & 1 \end{pmatrix}$$

et donc, si $v_x(u) \geq v_x(\mu)$, on a

$$\begin{aligned} & (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{1_x}^{H, \psi_x}) \left(\delta, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \psi_x(u) \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{1_x}^{H, \psi_x}) \left(\delta, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \mu \gamma_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

qui, d'après les Propositions V.1 et V.3, ne peut être non nul que si $v_x(\mu) \geq 0$ et $v_x(\gamma_1) \geq v_x(\mu \gamma_2)$. On remarque que si $v_x(u) \geq v_x(\mu) \geq 0$, on a nécessairement $\psi_x(u) = 1$ puisque la forme différentielle ω_X est régulière en x .

Si $v_x(u) \leq v_x(\mu)$, on écrit au contraire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{u}{\mu} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{u} & 1 \\ 0 & \frac{u}{\mu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{\mu}{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mu}{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mu}{u} & 0 \\ 0 & \frac{u}{\mu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{\mu}{u} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ \gamma_2 u & \mu \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\gamma_1}{\mu \gamma_2} \cdot \frac{\mu}{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mu}{u} \cdot \gamma_1 & 0 \\ 0 & \frac{u}{\mu} \cdot \mu \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{\mu}{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\gamma_1}{\gamma_2 u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mu}{u} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{\mu}{u} \end{pmatrix},$$

si bien qu'on obtient dans ce cas

$$\begin{aligned} & (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x}) \left(\delta, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u} \right) \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x}) \left(\delta, 1; \begin{pmatrix} \frac{\mu}{u} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

qui ne peut être non nul que si

$$v_x(\mu) \geq 0$$

et

$$v_x \left(\frac{\mu}{u} \gamma_1 \right) \geq v_x(\gamma_2 u), \text{ soit } 2v_x(u) \leq v_x \left(\mu \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right).$$

En résumé, on a prouvé :

Proposition V.5. – *Dans le contexte de ce paragraphe et du précédent, on a pour tout $\delta \in E_x^\times$ et tout $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in T_H(F_x) = F_x^\times \times F_x^\times$:*

(i) *L'intégrale locale*

$$\int_{H(F_x)/Z_H(F_x)} dg \cdot q^{-\deg_Q(g)} \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x})(\delta, 1; \gamma w_0 g, g)$$

est égale à

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x}) \left(\delta, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

(ii) *Pour tous $\mu \in F_x^\times$ et $u \in F_x$, la fonction à intégrer*

$$(K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x}) \left(\delta, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

vaut suivant les cas :

• *si $v_x(u) \geq v_x(\mu)$*

$$\begin{cases} (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x}) \left(\delta, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \mu \gamma_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & \text{si } v_x(\mu) \geq 0, \\ & \text{et } v_x(\gamma_1) \geq v_x(\mu \gamma_2), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

• *si $v_x(u) \leq v_x(\mu)$*

$$\begin{cases} \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u} \right) \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x}) \left(\delta, 1; \begin{pmatrix} \frac{\mu}{u} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & \text{si } v_x(\mu) \geq 0, \\ & \text{et } 2v_x(u) \leq v_x \left(\mu \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

Le facteur $\psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u} \right)$ qui apparaît dans la dernière partie de la proposition ci-dessus conduit à calculer :

Lemme V.6. – Soient m et v deux entiers.

(i) Pour tout élément $\gamma \in F_x^\times$ de valuation $v_x(\gamma) = v$, l'intégrale

$$\int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = m) \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1}\left(\frac{\gamma}{u}\right)$$

vaut suivant les cas :

- $\left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot q_x^{-m}$ si $m \geq 0$ et $v - m \geq 0$,
- -1 si $m = -1$ et $v - m \geq 0$,
- $-q_x^{-(m+1)}$ si $m \geq 0$ et $v - m = -1$,
- 0 si $m \neq v - m$ et $\begin{cases} m \leq -2 \\ \text{ou} \\ v - m \leq -2 \end{cases}$
- la somme de Kloosterman

$$\text{Kl}(\psi_x, \gamma) = \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}\left(v_x(u) = \frac{v}{2}\right) \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1}\left(\frac{\gamma}{u}\right)$$

si $v = 2m$ et $m \leq -1$.

(ii) De plus, si $m = v - m \leq -1$ et $\chi : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est un caractère, l'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\lambda \cdot \chi(\lambda) \cdot \mathbf{1}(v_x(\lambda) = v) \cdot \text{Kl}(\psi_x, \lambda)$$

vaut suivant les cas :

- $\frac{z_x(\chi)^{-1}}{q_x - 1}$ si $m = v - m = -1$ et χ est non ramifié,
- 0 si $m = v - m \leq -2$ et χ est non ramifié,
- $\frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \varepsilon(\psi_x, \chi) \cdot \varepsilon(\overline{\psi}_x, \chi)$ si χ est ramifié de conducteur $-m$, et $\varepsilon(\psi_x, \chi)$ désigne le facteur ε de module 1 associé à χ et ψ_x ,
- 0 si χ est ramifié de conducteur $\neq -m$.

Démonstration. Ce sont des calculs faciles. On rappelle que si χ est ramifié de conducteur $-m \geq 1$,

$$\varepsilon(\psi_x, \chi) = q_x^{\frac{m}{2}} \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = m) \cdot \psi_x(u) \cdot \chi(u)$$

est nécessairement de module 1. □

Nous voulons calculer les intégrales locales

$$\begin{aligned} & \int_{H(F_x)/Z_H(F_x)} dg \cdot q^{-\deg_Q(g)} \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x})(\delta, 1; \gamma w_0 g, g) \\ &= \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x}) \left(\delta, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

D'après le Lemme V.4, il suffit de traiter le cas où $\delta = 1$ et où la transformée de Satake $S_x^G(h_x)$ a l'une des formes suivantes :

- $X_1^{-k_1} \cdot X_2^{-k_2}$ avec $k_1 + k_2 = 0$ et $k_1 \geq 0$,
ou $k_1 + k_2 = 1$ et $k_1 \geq 1$,

quand la place x est scindée dans E ,

- 1 quand la place x est inerte et non ramifiée dans E .

3 Le cas où x est scindée et $k_1 + k_2 = 0$

On suppose donc que $E_x = F_x \times F_x$, et on cherche à calculer les intégrales

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x}) \left(1, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

lorsque $S_x^G(h_x) = X_1^{-k_1} \cdot X_2^{-k_2}$ avec $k_1 + k_2 = 0$ et $k_1 \geq 0$.

Nous allons prouver :

Proposition V.7. – Lorsque $S_x^G(h_x) = X_1^{-k_1} \cdot X_2^{-k_2}$ avec $k_1 + k_2 = 0$ et $k_1 \geq 0$, l'intégrale ci-dessus ne peut-être non nulle que si

$$v_x(\gamma_1) + v_x(\gamma_2) = 0.$$

Si cette condition est vérifiée, et en posant $v = v_x(\gamma_1) = -v_x(\gamma_2)$, elle vaut suivant les cas :

(i) Si $k_1 \geq 1$:

- $\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{q_x}\right) \cdot (q_x^{k_1} + q_x^{-k_1}) \cdot q_x^{-2v}$ si $v \geq k_1$,
- $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot (q_x^{-k_1} + q_x^{-3k_1})$ si $v = k_1 - 1$,
- 0 si $v < k_1 - 1$.

(ii) Si $k_1 = 0$:

- $\left(1 + \frac{1}{q_x}\right) \cdot q_x^{-2v}$ si $v \geq 0$,
- $\frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \text{Kl}\left(\psi_x, \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)$ si $v < 0$.

Démonstration. La première assertion résulte de la Proposition V.1.

Si $v_x(\gamma_1) = v = -v_x(\gamma_2)$, notre intégrale est égale d'après les Propositions V.1 et V.5 à la somme de

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) \geq v_x(\mu)) \cdot \mathbf{1}(0 \leq v_x(\mu) \leq 2v) \cdot q_x^{-v} \cdot \frac{1}{2} [\mathbf{1}(v_x(\mu) = v - k_1) + \mathbf{1}(v_x(\mu) = v + k_1)]$$

et de

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) < v_x(\mu)) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) \geq 0) \cdot \mathbf{1}(2v_x(u) \leq v_x(\mu) + 2v) \\ \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} u\right) \cdot q_x^{v_x(u) - v_x(\mu) - v} \cdot \frac{1}{2} [\mathbf{1}(v_x(u) = v - k_1) + \mathbf{1}(v_x(u) = v + k_1)].$$

Comme $k_1 \geq 0$, l'encadrement $0 \leq v_x(\mu) \leq 2v$ équivaut à $v \geq k_1$ si $v_x(\mu) = v - k_1$ ou si $v_x(\mu) = v + k_1$.

Donc la première intégrale ci-dessus vaut

- $q_x^{-v} \cdot \frac{1}{2} (q_x^{-v+k_1} + q_x^{-v-k_1})$ si $v \geq k_1$,
- 0 si $v < k_1$.

Voyons maintenant la seconde intégrale. Si $v_x(u) = v - k_1$, les encadrements

$$v_x(u) < v_x(\mu), \quad v_x(\mu) \geq 0, \quad 2v_x(u) \leq v_x(\mu) + 2v$$

équivalem à

$$v_x(\mu) > v - k_1 \quad \text{et} \quad v_x(\mu) \geq 0.$$

Et si $v_x(u) = v + k_1$, ils équivalem à

$$v_x(\mu) > v + k_1, \quad v_x(\mu) \geq 2k_1.$$

Supposons d'abord que $k_1 \geq 1$.

D'après le Lemme V.6, l'intégrale ne peut être non nulle que si

$$v - k_1 \geq -1.$$

Si $v \geq k_1$, l'intégrale devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = v - k_1) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) > v - k_1) \cdot q_x^{-k_1 - v_x(\mu)} \\ & + \frac{1}{2} \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = v + k_1) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) > v + k_1) \cdot q_x^{k_1 - v_x(\mu)} \\ & = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot q_x^{-v+k_1} \cdot \frac{q_x^{-v-1}}{1 - \frac{1}{q_x}} \\ & + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot q_x^{-v-k_1} \cdot \frac{q_x^{-v-1}}{1 - \frac{1}{q_x}} \\ & = \frac{1}{2} \cdot q_x^{-2v-1} \cdot (q_x^{k_1} + q_x^{-k_1}). \end{aligned}$$

Et si $v = k_1 - 1$, elle devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = -1) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) \geq 0) \cdot q_x^{-k_1 - v_x(\mu)} \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u}\right) \\ & + \frac{1}{2} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = 2k_1 - 1) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) \geq 2k_1) \cdot q_x^{k_1 - v_x(\mu)} \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u}\right) \\ & = -\frac{1}{2} \cdot q_x^{-k_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \\ & \quad - \frac{1}{2} \cdot q_x^{-2k_1} \cdot q_x^{k_1} \cdot \frac{q_x^{-2k_1}}{1 - \frac{1}{q_x}} \\ & = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot (q_x^{-k_1} + q_x^{-3k_1}). \end{aligned}$$

Enfin, supposons que $k_1 = 0$.

Alors notre seconde intégrale s'écrit

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = v) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) \geq \max\{v+1, 0\}) \cdot q_x^{-v_x(\mu)} \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u}\right).$$

Si $v \geq 0$, on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot q_x^{-v} \cdot \frac{q_x^{-v-1}}{1 - \frac{1}{q_x}} = q_x^{-2v-1},$$

et si $v \leq -1$, on obtient

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \text{Kl}\left(\psi_x, \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right).$$

Cela termine la démonstration de la proposition. □

On déduit de cette proposition et du Lemme V.6(ii) :

Corollaire V.8. – Lorsque $S_x^G(h_x) = X_1^{-k_1} \cdot X_2^{-k_2}$ avec $k_1 + k_2 = 0$ et $k_1 \geq 0$, et si $\chi_1, \chi_2 : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ sont deux caractères multiplicatifs, l'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\gamma_1 \cdot \chi_1(\gamma_1) \cdot \int_{F_x^\times} d\gamma_2 \cdot \chi_2(\gamma_2) \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x^\times} du \cdot \\ (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{1_x}^{H, \psi_x}) \left(1, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

vaut suivant les cas :

(i) Si $k_1 \geq 1$ et χ_1, χ_2 sont non ramifiés :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(q_x^{-k_1} + q_x^{-3k_1})}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)^{k_1} \cdot \frac{1 - z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)^{-1}}{1 - q_x^{-2} \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)}.$$

(ii) Si $k_1 \geq 1$ et χ_1 ou χ_2 est ramifié :

$$0.$$

(iii) Si $k_1 = 0$ et χ_1, χ_2 sont non ramifiés :

$$\frac{1 - \frac{1 - z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)^{-1}}{q_x} - \frac{1}{q_x^2}}{\left(1 - \frac{1}{q_x} \right)^2 \cdot \left(1 - q_x^{-2} \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \right)}.$$

(iv) Si $k_1 = 0$, $\chi_1 \chi_2$ est non ramifié et χ_1, χ_2 sont ramifiés :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x} \right)^2} \cdot \varepsilon(\psi_x, \chi_1) \cdot \varepsilon(\overline{\psi_x}, \chi_2^{-1}).$$

(v) Si $k_1 = 0$ et $\chi_1 \chi_2$ est ramifié :

$$0.$$

Remarque. On note que si $\frac{\chi_1}{\chi_2}$ est le caractère trivial, l'expression de (i) s'annule et celle de (iii) devient

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x} \right)^2}.$$

Démonstration du corollaire.

(i) Si χ_1, χ_2 sont non ramifiés, posons $z = z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)$. D'après la Proposition V.7(i), notre intégrale est la somme de

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{q_x} \right) \cdot (q_x^{k_1} + q_x^{-k_1}) \cdot \frac{(q_x^{-2} \cdot z)^{k_1}}{1 - q_x^{-2} \cdot z}$$

et de

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot (q_x^{-k_1} + q_x^{-3k_1}) \cdot z^{k_1-1}.$$

En mettant en facteur

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(q_x^{k_1} + q_x^{-k_1})}{\left(1 - \frac{1}{q_x} \right) \cdot (1 - q_x^{-2} \cdot z)},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right) \cdot (q_x^{-2} \cdot z)^{k_1} - q_x^{-2k_1} \cdot z^{k_1-1} (1 - q_x^{-2} \cdot z) \\
&= q_x^{-2k_1} \cdot z^{k_1} - q_x^{-2k_1-2} \cdot z^{k_1} - q_x^{-2k_1} \cdot z^{k_1-1} + q_x^{-2k_1-2} \cdot z^{k_1} \\
&= q_x^{-2k_1} \cdot z^{k_1} \cdot (1 - z^{-1}).
\end{aligned}$$

(ii) est une conséquence immédiate de la Proposition V.7(i).

(iii) Si χ_1, χ_2 sont non ramifiés, $z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) = z$ et $k_1 = 0$, notre intégrale est égale, d'après la Proposition V.7(ii) et le Lemme V.6(ii), à la somme

$$\left(1 + \frac{1}{q_x}\right) \cdot \frac{1}{1 - q_x^{-2} \cdot z} + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x}\right)^2} \cdot \frac{1}{q_x \cdot z}.$$

En mettant en facteur

$$\frac{1}{(1 - q_x^{-2} \cdot z) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x}\right)^2},$$

on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) + \frac{1}{q_x \cdot z} \cdot (1 - q_x^{-2} \cdot z) = 1 - \frac{1}{q_x} - \frac{1}{q_x^2} + \frac{1}{q_x^3} + \frac{1}{q_x \cdot z} - \frac{1}{q_x^3} = 1 - \frac{(1 - z^{-1})}{q_x} - \frac{1}{q_x^2}.$$

(iv) Si $\chi_1 \chi_2$ est non ramifié et χ_1, χ_2 sont ramifiés de conducteur N , il résulte de la Proposition V.7(ii) que notre intégrale locale est égale à

$$\begin{aligned}
& \int_{F_x^\times} d\gamma_1 \cdot \chi_1(\gamma_1) \cdot \mathbf{1}(v_x(\gamma_1) = -N) \cdot \int_{F_x^\times} d\gamma_2 \cdot \chi_2(\gamma_2) \cdot \mathbf{1}(v_x(\gamma_2) = N) \\
& \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = -N) \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u}\right) \\
&= \int_{F_x} du' \cdot \mathbf{1}(v_x(u') = -N) \cdot \int_{F_x^\times} d\gamma_2 \cdot \mathbf{1}(v_x(\gamma_2) = N) \cdot \\
& \chi_1(u' \gamma_2 u) \cdot \chi_2(\gamma_2) \cdot \frac{q_x^{-N}}{\left(1 - \frac{1}{q_x}\right)^2} \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = -N) \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1}(u') \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x}\right)^2} \cdot \varepsilon(\psi_x, \chi_1) \cdot \varepsilon(\overline{\psi}_x, \chi_1) \cdot z_x(\chi_1 \chi_2)^N \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x}\right)^2} \cdot \varepsilon(\psi_x, \chi_1) \cdot \varepsilon(\overline{\psi}_x, \chi_2^{-1}).
\end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait. □

4 Le cas où x est scindée et $k_1 + k_2 = 1$

On suppose toujours que $E_x = F_x \times F_x$, et on cherche à calculer les intégrales

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x}) \left(1, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}\right) \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lorsque $S_x^G(h_x) = X_1^{-k_1} \cdot X_2^{-k_2}$ avec $k_1 + k_2 = 1$ et $k_1 \geq 1$.

Nous allons prouver :

Proposition V.9. – Lorsque $S_x^G(h_x) = X_1^{-k_1} \cdot X_2^{-k_2}$ avec $k_1 + k_2 = 1$ et $k_1 \geq 1$, l'intégrale ci-dessus ne peut être non nulle que si

$$v_x(\gamma_1) + v_x(\gamma_2) = 1.$$

Si cette condition est vérifiée, et en posant $v_x(\gamma_1) = v$, $v_x(\gamma_2) = 1 - v$, elle vaut

- $\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{q_x}\right) \cdot (q_x^{-\frac{1}{2}+k_1} + q_x^{\frac{1}{2}-k_1}) \cdot q_x^{1-2v}$ si $v \geq k_1$,
- $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{q_x}} \cdot (q_x^{-\frac{1}{2}+k_1} + q_x^{\frac{1}{2}-k_1}) \cdot q_x^{1-2k_1}$ si $v = k_1 - 1$,
- 0 si $v < k_1 - 1$.

Démonstration. La première assertion résulte de la Proposition V.1. Si $v_x(\gamma_1) = v$ et $v_x(\gamma_2) = 1 - v$, notre intégrale est égale d'après les Propositions V.1 et V.5 à la somme de

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) \geq v_x(\mu)) \cdot \mathbf{1}(0 \leq v_x(\mu) \leq 2v-1) \cdot q_x^{\frac{1}{2}-v} \cdot \frac{1}{2} [\mathbf{1}(v_x(\mu) = v - k_1) + \mathbf{1}(v_x(\mu) = -1 + v + k_1)]$$

et de

$$\begin{aligned} & \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) < v_x(\mu)) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) \geq 0) \cdot \mathbf{1}(2v_x(u) \leq v_x(\mu) + 2v - 1) \\ & \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u} \right) \cdot q_x^{v_x(u) - v_x(\mu) + \frac{1}{2} - v} \cdot \frac{1}{2} [\mathbf{1}(v_x(u) = v - k_1) + \mathbf{1}(v_x(u) = -1 + v + k_1)]. \end{aligned}$$

Comme $k_1 \geq 1$, l'encadrement $0 \leq v_x(\mu) \leq 2v - 1$ équivaut à $v \geq k_1$ si $v_x(\mu) = v - k_1$ ou si $v_x(\mu) = v + k_1 - 1$. Donc la première intégrale ci-dessus vaut

- $q_x^{\frac{1}{2}-v} \cdot \frac{1}{2} \cdot (q_x^{-v+k_1} + q_x^{-v-k_1+1}) = \frac{1}{2} \cdot (q_x^{-\frac{1}{2}+k_1} + q_x^{\frac{1}{2}-k_1}) \cdot q_x^{1-2v}$ si $v \geq k_1$,
- 0 si $v < k_1$.

Voyons maintenant la seconde intégrale. Si $v_x(u) = v - k_1$, les encadrements $v_x(u) < v_x(\mu)$, $v_x(\mu) \geq 0$, $2v_x(u) \leq v_x(\mu) + 2v - 1$ équivalent à

$$v_x(\mu) \geq \max\{v - k_1 + 1, 0\}.$$

Et si $v_x(u) = v + k_1 - 1$, ils équivalent à

$$v_x(\mu) \geq \max\{v + k_1, 2k_1 - 1\}.$$

D'après le Lemme V.6, l'intégrale ne peut être non nulle que si

$$v - k_1 \geq -1.$$

Si $v \geq k_1$, l'intégrale devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = v - k_1) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) \geq v - k_1 + 1) \cdot q_x^{\frac{1}{2}-k_1-v_x(\mu)} \\ & + \frac{1}{2} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = v + k_1 - 1) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) \geq v + k_1) \cdot q_x^{k_1-\frac{1}{2}-v_x(\mu)} \\ & = \frac{1}{2} \cdot q_x^{\frac{1}{2}-k_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot q_x^{-v+k_1} \cdot \frac{q_x^{-v+k_1-1}}{1 - \frac{1}{q_x}} \\ & + \frac{1}{2} \cdot q_x^{-\frac{1}{2}+k_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot q_x^{1-v-k_1} \cdot \frac{q_x^{-v-k_1}}{1 - \frac{1}{q_x}} \\ & = \frac{1}{2} \cdot (q_x^{-\frac{1}{2}+k_1} + q_x^{\frac{1}{2}-k_1}) \cdot q_x^{-2v}. \end{aligned}$$

Et si $v = k_1 - 1$, elle devient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = -1) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) \geq 0) \cdot q_x^{\frac{1}{2}-k_1-v_x(\mu)} \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u}\right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = 2k_1 - 2) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) \geq 2k_1 - 1) \cdot q_x^{k_1-\frac{1}{2}-v_x(\mu)} \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u}\right) \\
& = -\frac{1}{2} \cdot q_x^{\frac{1}{2}-k_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{q_x}} \\
& \quad - \frac{1}{2} \cdot q_x^{2-2k_1-1} \cdot q_x^{k_1-\frac{1}{2}-2k_1+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{q_x}} \\
& = -\frac{1}{2} \cdot (q_x^{\frac{1}{2}-k_1} + q_x^{-\frac{1}{2}+k_1}) \cdot q_x^{1-2k_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{q_x}}.
\end{aligned}$$

Cela termine la démonstration. □

On déduit de cette proposition :

Corollaire V.10. – Lorsque $S_x^G(h_x) = X_1^{-k_1} \cdot X_2^{-k_2}$ avec $k_1 + k_2 = 1$ et $k_1 \geq 1$, et si $\chi_1, \chi_2 : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ sont deux caractères multiplicatifs, l'intégrale

$$\begin{aligned}
& \int_{F_x^\times} d\gamma_1 \cdot \chi_1(\gamma_1) \cdot \int_{F_x^\times} d\gamma_2 \cdot \chi_2(\gamma_2) \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x^\times} du \cdot \\
& (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{1_x}^{H, \psi_x}) \left(1, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

est nulle si χ_1 ou χ_2 est ramifié.

Et si χ_1 et χ_2 sont non ramifiés, elle vaut

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q_x^{\frac{1}{2}-k_1} + q_x^{-\frac{1}{2}+k_1}}{1-\frac{1}{q_x}} \cdot q_x^{1-2k_1} \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)^{k_1} \cdot \frac{1 - z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)^{-1}}{1 - q_x^{-2} \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)} \cdot z_x(\chi_2).$$

Remarque. On note que si $\frac{\chi_1}{\chi_2}$ est le caractère trivial, l'expression du corollaire s'annule.

Démonstration du corollaire.

La première assertion est conséquence immédiate de la Proposition V.9.

Si χ_1 et χ_2 sont non ramifiés, et si on pose $z = z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)$, notre intégrale est la somme de

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{q_x}\right) \cdot (q_x^{-\frac{1}{2}+k_1} + q_x^{\frac{1}{2}-k_1}) \cdot \sum_{v \geq k_1} q_x^{1-2v} \cdot z_x(\chi_1)^v \cdot z_x(\chi_2)^{1-v} \\
& = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{q_x}\right) \cdot (q_x^{-\frac{1}{2}+k_1} + q_x^{\frac{1}{2}-k_1}) \cdot q_x z_x(\chi_2) \cdot \frac{q_x^{-2k_1} \cdot z^{k_1}}{1 - q_x^{-2} \cdot z}
\end{aligned}$$

et de

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{q_x}} \cdot (q_x^{-\frac{1}{2}+k_1} + q_x^{\frac{1}{2}-k_1}) \cdot q_x z_x(\chi_2) \cdot q_x^{-2k_1} \cdot z^{k_1-1}.$$

En mettant en facteur

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q_x^{-\frac{1}{2}+k_1} + q_x^{\frac{1}{2}-k_1}}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot q_x^{1-2k_1} \cdot z^{k_1} \cdot z_x(\chi_2) \cdot \frac{1}{1 - q_x^{-2} \cdot z},$$

on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right) - z^{-1} \cdot (1 - q_x^{-2} \cdot z) = 1 - z^{-1}.$$

C'est ce qu'on voulait. □

5 Le cas où x est inerte et non ramifiée et où $h_x = \mathbf{1}_x$

On suppose maintenant que E_x est une extension non ramifiée de F_x , et on cherche à calculer les intégrales

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x}) \left(1, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

lorsque $S_x^G(h_x) = 1$ c'est-à-dire que h_x est la fonction caractéristique de $O_{E_x}^\times$ dans E_x^\times .

Nous allons prouver :

Proposition V.11. – *Lorsque $S_x^G(h_x) = 1$, l'intégrale ci-dessus ne peut être non nulle que si*

$$v_x(\gamma_1) + v_x(\gamma_2) = 0.$$

Si cette condition est vérifiée, et en posant $v = v_x(\gamma_1) = -v_x(\gamma_2)$, elle vaut :

- $\frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot (-1)^v \cdot q_x^{-v}$ si $v \geq 0$,
- $\frac{1}{1 - \frac{1}{q_x^2}} \cdot \text{Kl}\left(\psi_x, \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)$ si $v \leq -1$.

Démonstration. La première assertion résulte de la Proposition V.3.

Si $v_x(\gamma_1) = v = -v_x(\gamma_2)$, notre intégrale est égale d'après les Propositions V.3 et V.5 à la somme de

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) \geq v_x(\mu)) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) \in 2\mathbb{N}) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) \leq 2v) \cdot q_x^{-v} \cdot (-1)^{v_x(\mu)-v}$$

et de

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) < v_x(\mu)) \cdot \mathbf{1}(v_x(\mu) \in 2\mathbb{N}) \cdot \mathbf{1}(2v + v_x(\mu) \geq 2v_x(u)) \\ \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} u\right) \cdot q_x^{-v+v_x(u)-v_x(\mu)} \cdot (-1)^{v_x(u)-v}.$$

Voyons d'abord la première intégrale.

En notant $2v' = v_x(\mu)$, elle s'écrit

$$\sum_{0 \leq v' \leq v} \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) \geq 2v') \cdot q_x^{-v} \cdot (-1)^v = (-1)^v \cdot q_x^{-v} \cdot \sum_{0 \leq v' \leq v} q_x^{-2v'} \\ = \begin{cases} (-1)^v \cdot q_x^{-v} \cdot \frac{1 - q_x^{-2v-2}}{1 - q_x^{-2}} & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{si } v \leq -1. \end{cases}$$

Passons à la seconde intégrale.

En notant toujours $2v' = v_x(\mu)$, elle s'écrit

$$\sum_{v' \geq 0} \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) < 2v') \cdot \mathbf{1}(v_x(u) \leq v + v') \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u} \right) \cdot q_x^{v_x(u) - v - 2v'} \cdot (-1)^{v_x(u) + v}$$

avec $v_x \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) = 2v$.

Si $v \leq -1$, on trouve d'après le Lemme V.6(i)

$$\sum_{v' \geq 0} \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = v) \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u} \right) \cdot q_x^{-2v'} = \frac{1}{1 - q_x^{-2}} \cdot \text{Kl} \left(\psi_x, \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right).$$

C'est la dernière partie de l'énoncé de la proposition.

Voyons enfin ce qui se passe quand $v \geq 0$.

Notre seconde intégrale s'écrit, en posant $v_x(u) = v''$,

$$\sum_{\substack{v' \geq 0 \\ v'' \leq 2v' - 1 \\ v'' \leq v + v'}} \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = v'') \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u} \right) \cdot q_x^{v'' - v - 2v'} \cdot (-1)^{v'' + v}$$

et d'après le Lemme V.6(i), il n'y a de contributions non nulles que pour

$$-1 \leq v'' \leq 2v + 1.$$

On remarque que les deux inégalités

$$\begin{cases} v'' \leq 2v' - 1, \\ v'' \leq 2v + 1, \end{cases}$$

entraînent automatiquement la troisième

$$v'' \leq v + v'.$$

Donc notre seconde intégrale s'écrit encore comme la somme de

$$\sum_{\substack{0 \leq v' \leq v \\ -1 \leq v'' \leq 2v' - 1}} (-1)^{v + v''} \cdot q_x^{-v - 2v' + v''} \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = v'') \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u} \right)$$

et de

$$\sum_{\substack{v' \geq v + 1 \\ -1 \leq v'' \leq 2v + 1}} (-1)^{v + v''} \cdot q_x^{-v - 2v' + v''} \cdot \int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = v'') \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u} \right).$$

Or l'intégrale

$$\int_{F_x} du \cdot \mathbf{1}(v_x(u) = v'') \cdot \psi_x(u) \cdot \psi_x^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 u} \right)$$

vaut d'après le Lemme V.6(i) :

- -1 si $v'' = -1$,
- $\left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot q_x^{-v''}$ si $0 \leq v'' \leq 2v$,
- $-q_x^{-2v-2}$ si $v'' = 2v + 1$.

Donc notre seconde intégrale est la somme des quatre termes suivants :

- $$\sum_{v' \geq 0} (-1)^{v-1} \cdot q_x^{-v-2v'-1} \cdot (-1) = (-1)^v \cdot q_x^{-v-1} \cdot \frac{1}{1-q_x^{-2}}$$
- $$\begin{aligned} & \sum_{\substack{0 \leq v' \leq v \\ 0 \leq v'' \leq 2v'-1}} (-1)^{v+v''} \cdot q_x^{-v-2v'+v''} \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot q_x^{-v''} \\ &= \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot \sum_{0 \leq v' \leq v} (-1)^v \cdot q_x^{-v} \cdot q_x^{-2v'} \cdot \sum_{0 \leq v'' \leq 2v'-1} (-1)^{v''} = 0 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \sum_{\substack{v' \geq v+1 \\ 0 \leq v'' \leq 2v}} (-1)^{v+v''} \cdot q_x^{-v-2v'+v''} \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot q_x^{-v''} \\ &= \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot (-1)^v \cdot q_x^{-v} \cdot \sum_{v' \geq v+1} q_x^{-2v'} \cdot \sum_{0 \leq v'' \leq 2v} (-1)^{v''} \\ &= \frac{1-q_x^{-1}}{1-q_x^{-2}} \cdot (-1)^v \cdot q_x^{-3v-2} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \sum_{v' \geq v+1} (-1)^{3v+1} \cdot q_x^{v+1-2v'} \cdot (-q_x^{-2v-2}) \\ &= (-1)^v \cdot q_x^{-v-1} \cdot \frac{q_x^{-2v-2}}{1-q_x^{-2}} \\ &= (-1)^v \cdot q_x^{-3v-3} \cdot \frac{1}{1-q_x^{-2}}. \end{aligned}$$

Calculons la somme de ces quatre termes. En mettant en facteur

$$\frac{(-1)^v \cdot q_x^{-v}}{1-q_x^{-2}},$$

on obtient

$$q_x^{-1} + \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot q_x^{-2v-2} + q_x^{-2v-3} = q_x^{-1} + q_x^{-2v-2},$$

si bien que, pour $v \geq 0$, notre seconde intégrale est égale à

$$(-1)^v \cdot q_x^{-v} \cdot \frac{q_x^{-1} + q_x^{-2v-2}}{1-q_x^{-2}}.$$

En lui ajoutant la valeur de la première intégrale pour $v \geq 0$, qui est

$$(-1)^v \cdot q_x^{-v} \cdot \frac{1-q_x^{-2v-2}}{1-q_x^{-2}},$$

on obtient la formule annoncée

$$(-1)^v \cdot q_x^{-v} \cdot \frac{1+q_x^{-1}}{1-q_x^{-2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{q_x}} \cdot (-1)^v \cdot q_x^{-v}.$$

□

On déduit de cette proposition :

Corollaire V.12. – Lorsque x est inerte et non ramifiée dans E sur F et que $S_x^G(h_x) = 1$, et si $\chi_1, \chi_2 : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ sont deux caractères, l'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\gamma_1 \cdot \chi_1(\gamma_1) \cdot \int_{F_x^\times} d\gamma_2 \cdot \chi_2(\gamma_2) \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \\ (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{1_x}^{H, \psi_x}) \left(1, 1; \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

vaut suivant les cas :

(i) Si $\chi_1 \chi_2$ est ramifié :

$$0.$$

(ii) Si $\chi_1 \chi_2$ est non ramifié mais que χ_1, χ_2 sont ramifiés :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right)} \cdot \varepsilon(\psi_x, \chi_1) \cdot \varepsilon(\overline{\psi_x}, \chi_2^{-1}).$$

(iii) Si χ_1 et χ_2 sont non ramifiés :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right)} \cdot \frac{1 + q_x^{-1} \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)^{-1}}{1 + q_x^{-1} \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)}.$$

Remarque. Si $\chi_1 \chi_2$ est non ramifié et $\frac{\chi_1}{\chi_2}$ est le caractère trivial, on trouve simplement $\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right)}$.

Démonstration.

(i) est une conséquence immédiate de la Proposition V.11.

(ii) se déduit de la Proposition V.11 de la même façon que le Corollaire V.8(iv) se déduit de la Proposition V.7(ii).

(iii) D'après la Proposition V.11 et le Lemme V.6(ii), on obtient dans ce cas, en notant $z = z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)$,

$$\frac{1}{1 - q_x^{-2}} \cdot \frac{1}{q_x - 1} \cdot z^{-1} + \sum_{v \geq 0} \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot (-1)^v \cdot q_x^{-v} \cdot z^v \\ = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x}\right)} \cdot q_x^{-1} \cdot z^{-1} + \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \frac{1}{1 + q_x^{-1} \cdot z}.$$

En mettant en facteur

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot (1 + q_x^{-1} \cdot z)},$$

on obtient

$$(1 + q_x^{-1} z) q_x^{-1} \cdot z^{-1} + \left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right) = 1 + q_x^{-1} \cdot z^{-1}$$

comme annoncé. \square

6 Calcul des coefficients de Fourier locaux

Considérons d'abord une place $x \in |X|$ où E_x est scindée sur F_x et la forme différentielle ω_X est régulière. En une telle place, on dispose des intégrales

$$I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\gamma_1, \gamma_2; \gamma'_1, \gamma'_2) = \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \\ (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{h'_x}^{H, \psi_x}) \left(\gamma_1, \gamma_2; \begin{pmatrix} \gamma'_1 & 0 \\ 0 & \gamma'_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

On sait que chaque fonction $I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}$ sur $F_x^\times \times F_x^\times \times F_x^\times \times F_x^\times$ est invariante par F_x^\times plongé par $\gamma_0 \mapsto (\gamma_0, \gamma_0; \gamma_0^{-1}, \gamma_0^{-1})$, et qu'elle est égale à $I_{h_x *_{\rho} (h'_x), \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}$.

Les coefficients de Fourier des fonctions $I_{h_x, \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}$ sont donnés par :

Proposition V.13. – Soit h_x une fonction sphérique sur $E_x^\times = F_x^\times \times F_x^\times$ dont la transformée de Satake est $S_x^G(h_x) = X_1^{-k_1} \cdot X_2^{-k_2}$.

Si $\chi_1, \chi_2, \chi'_1, \chi'_2$ sont quatre caractères de F_x^\times tels que $\chi_1 \chi_2 = \chi'_1 \chi'_2$, l'intégrale

$$\int \cdot \int_{(F_x^\times)^2 \times (F_x^\times)^2 / F_x^\times} d\gamma_1 \cdot d\gamma_2 \cdot d\gamma'_1 \cdot d\gamma'_2 \cdot \chi_1(\gamma_1) \cdot \chi_2(\gamma_2) \cdot \chi'_1(\gamma'_1) \cdot \chi'_2(\gamma'_2) \cdot I_{h_x, \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\gamma_1, \gamma_2; \gamma'_1, \gamma'_2)$$

vaut suivant les cas :

(i) Si χ_1 ou χ_2 est ramifié :

$$0.$$

(ii) Si χ_1, χ_2 sont non ramifiés, mais χ'_1, χ'_2 sont ramifiés :

$$z_x(\chi_1)^{k_1} \cdot z_x(\chi_2)^{k_2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x}\right)^2} \cdot \varepsilon(\psi_x, \chi'_1) \cdot \varepsilon(\overline{\psi_x}, \chi'^{-1}_2).$$

(iii) Si $\chi_1, \chi_2, \chi'_1, \chi'_2$ sont non ramifiés :

$$z_x(\chi_1)^{k_1} \cdot z_x(\chi_2)^{k_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \frac{1 - z_x\left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}}{1 - z_x\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-2}} \\ \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1 - z_x\left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right)^2 \cdot q_x^{-2}}{\left(1 - z_x\left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-1/2}\right) \cdot \left(1 - z_x\left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-3/2}\right)} + \frac{1 - z_x\left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right)^2 \cdot q_x^{-2}}{\left(1 - z_x\left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-1/2}\right) \cdot \left(1 - z_x\left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-3/2}\right)} \right] \\ + z_x(\chi_1)^{k_1} \cdot z_x(\chi_2)^{k_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot z_x\left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}.$$

Démonstration.

(i) résulte de ce que $I_{h_x, \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\gamma_1, \gamma_2; \gamma'_1, \gamma'_2)$ ne dépend de γ_1 et γ_2 que via leurs valuations.

(ii) et (iii) Pour tous entiers v_1, v_2 , notons $\mathbf{1}_x(v_1, v_2)$ la fonction sphérique sur $E_x^\times = F_x^\times \times F_x^\times$ dont la transformée de Satake est $X_1^{-v_1} \cdot X_2^{-v_2}$, avec donc $h_x = \mathbf{1}_x(k_1, k_2)$. Si $v_1 = v_x(\gamma_1)$ et $v_2 = v_x(\gamma_2)$, on a

$$I_{h_x, \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\gamma_1, \gamma_2; \gamma'_1, \gamma'_2) = I_{\mathbf{1}_x(k_1 - v_1, k_2 - v_2), \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(1, 1; \gamma'_1, \gamma'_2)$$

et donc l'intégrale de l'énoncé est égale à

$$\begin{aligned} & \sum_{v \in \mathbb{Z}} z_x(\chi_1)^{k_1-v} \cdot z_x(\chi_2)^{k_2+v} \cdot \iint_{F_x^\times \times F_x^\times} d\gamma'_1 \cdot d\gamma'_2 \cdot \chi'_1(\gamma'_1) \chi'_2(\gamma'_2) \cdot I_{\mathbf{1}_x(v,-v), \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G,H,\rho}(1, 1; \gamma'_1, \gamma'_2) \\ & + \sum_{v \in \mathbb{Z}} z_x(\chi_1)^{k_1-v} \cdot z_x(\chi_2)^{k_2+v-1} \cdot \iint_{F_x^\times \times F_x^\times} d\gamma'_1 \cdot d\gamma'_2 \cdot \chi'_1(\gamma'_1) \cdot \chi'_2(\gamma'_2) \cdot I_{\mathbf{1}_x(v,1-v), \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G,H,\rho}(1, 1; \gamma'_1, \gamma'_2). \end{aligned}$$

Si χ'_1 et χ'_2 sont ramifiés, on conclut d'après le Corollaire V.8(ii) et (iv), et le Corollaire V.10.

Il reste le cas où $\chi_1, \chi_2, \chi'_1, \chi'_2$ sont tous non ramifiés.

Si $v \geq 1$, l'intégrale

$$\int_{F_x^\times \times F_x^\times} d\gamma'_1 \cdot d\gamma'_2 \cdot \chi'_1(\gamma'_1) \cdot \chi'_2(\gamma'_2) \cdot I_{\mathbf{1}_x(v,-v), \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G,H,\rho}(1, 1; \gamma'_1, \gamma'_2)$$

est égale d'après le Corollaire V.8(i) à

$$z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right)^v \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \frac{q_x^{-v} + q_x^{-3v}}{2} \cdot \frac{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right)^{-1}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right) \cdot q_x^{-2}}.$$

Si $v \leq -1$, elle est égale par symétrie à la même formule où on remplace v par $|v| = -v$.

Si $v = 0$, elle est égale d'après le Corollaire V.8(iii) à

$$\frac{1 - \frac{1}{q_x} + \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right)^{-1}}{q_x} - \frac{1}{q_x^2}}{\left(1 - \frac{1}{q_x}\right)^2 \cdot \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right) \cdot q_x^{-2}\right)}.$$

Puis, si $v \geq 1$, l'intégrale

$$\int_{F_x^\times \times F_x^\times} d\gamma'_1 \cdot d\gamma'_2 \cdot \chi'_1(\gamma'_1) \cdot \chi'_2(\gamma'_2) \cdot I_{\mathbf{1}_x(v,1-v), \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G,H,\rho}(1, 1; \gamma'_1, \gamma'_2)$$

est égale d'après le Corollaire V.10 à

$$z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right)^v \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \frac{q_x^{\frac{1}{2}-v} + q_x^{\frac{3}{2}-3v}}{2} \cdot z_x(\chi'_2) \cdot \frac{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right)^{-1}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right) \cdot q_x^{-2}}.$$

Enfin, si $v \leq 0$, elle est égale par symétrie à la même formule où on remplace v par $1 - v$.

En faisant la somme de tous ces termes et en mettant partout en facteur

$$z_x(\chi_1)^{k_1} \cdot z_x(\chi_2)^{k_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \frac{1}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right) \cdot q_x^{-2}},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot \sum_{v \geq 1} \frac{q_x^{-v} + q_x^{-3v}}{2} \cdot z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^v \cdot z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_1}\right)^v \\
& + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot \sum_{v \geq 1} \frac{q_x^{-v} + q_x^{-3v}}{2} \cdot z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^v \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)^v \\
& + 1 + \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1} \cdot q_x^{-1} - q_x^{-2}}{1 - \frac{1}{q_x}} \\
& + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot z_x \left(\frac{\chi'_2}{\chi_2}\right) \cdot \sum_{v \geq 1} \frac{q_x^{\frac{1}{2}-v} + q_x^{\frac{3}{2}-3v}}{2} \cdot z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^v \cdot z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_1}\right)^v \\
& + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot z_x \left(\frac{\chi'_2}{\chi_1}\right) \cdot \sum_{v \geq 1} \frac{q_x^{\frac{1}{2}-v} + q_x^{\frac{3}{2}-3v}}{2} \cdot z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^v \cdot z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)^v \\
& = \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_2}{\chi'_2 \chi_1}\right) \cdot q_x^{-1}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_2}{\chi'_2 \chi_1}\right) \cdot q_x^{-1}} + \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_2}{\chi'_2 \chi_1}\right) \cdot q_x^{-3}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_2}{\chi'_2 \chi_1}\right) \cdot q_x^{-3}} \right] \\
& + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_1}{\chi'_2 \chi_2}\right) \cdot q_x^{-1}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_1}{\chi'_2 \chi_2}\right) \cdot q_x^{-1}} + \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_1}{\chi'_2 \chi_2}\right) \cdot q_x^{-3}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_1}{\chi'_2 \chi_2}\right) \cdot q_x^{-3}} \right] \\
& + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) + \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1} - q_x^{-2}}{1 - \frac{1}{q_x}} \\
& + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-\frac{1}{2}}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_2}{\chi'_2 \chi_1}\right) \cdot q_x^{-1}} + \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-\frac{3}{2}}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_2}{\chi'_2 \chi_1}\right) \cdot q_x^{-3}} \right] \\
& + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-\frac{1}{2}}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_1}{\chi'_2 \chi_2}\right) \cdot q_x^{-1}} + \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-\frac{3}{2}}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_1}{\chi'_2 \chi_2}\right) \cdot q_x^{-3}} \right] \\
& = \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-1/2} \cdot \left(1 + z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-1/2}\right)}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_2}{\chi'_2 \chi_1}\right) \cdot q_x^{-1}} + \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-3/2} \cdot \left(1 + z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-3/2}\right)}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_2}{\chi'_2 \chi_1}\right) \cdot q_x^{-3}} \right] \\
& + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-1/2} \cdot \left(1 + z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-1/2}\right)}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_1}{\chi'_2 \chi_2}\right) \cdot q_x^{-1}} + \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-3/2} \cdot \left(1 + z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-3/2}\right)}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1 \chi_1}{\chi'_2 \chi_2}\right) \cdot q_x^{-3}} \right] \\
& + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) + z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1} \cdot \frac{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right) \cdot q_x^{-2}}{1 - \frac{1}{q_x}}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité $\chi_1 \chi_2 = \chi'_1 \chi'_2$ qui équivaut à $z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) = z_x \left(\frac{\chi_2}{\chi_2}\right)$ ou $z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) = z_x \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)$, notre expression

se simplifie en

$$\begin{aligned}
& \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-1/2}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-1/2}} + \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-3/2}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-3/2}} \right] \\
& + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-1/2}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-1/2}} + \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-3/2}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-3/2}} \right] \\
& + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right) \cdot q_x^{-2}\right) \cdot \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}}{1 - \frac{1}{q_x}} \\
& = \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}\right) \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right)^2 \cdot q_x^{-2}}{\left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-1/2}\right) \cdot \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_1}\right) \cdot q_x^{-3/2}\right)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right)^2 \cdot q_x^{-2}}{\left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-1/2}\right) \cdot \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi_2}\right) \cdot q_x^{-3/2}\right)} \right] \\
& + \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right) \cdot q_x^{-2}\right) \cdot \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1}}{1 - \frac{1}{q_x}}.
\end{aligned}$$

En multipliant par le facteur

$$z_x(\chi_1)^{k_1} \cdot z_x(\chi_2)^{k_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \frac{1}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right) \cdot q_x^{-2}},$$

on obtient la formule de (iii). \square

Considérons maintenant une place $x \in |X|$ où E_x est une extension non ramifiée de F_x et où la forme différentielle ω_X est régulière.

En une telle place, on dispose cette fois des intégrales

$$\begin{aligned}
I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\gamma; \gamma'_1, \gamma'_2) &= \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x} du \cdot \\
& (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{h'_x}^{H, \psi_x}) \left(\gamma; \begin{pmatrix} \gamma'_1 & 0 \\ 0 & \gamma'_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

qui sont des fonctions de $(\gamma; \gamma'_1, \gamma'_2) \in E_x^\times \times (F_x^\times)^2$. On sait que chaque $I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}$ est invariante par F_x^\times plongé dans $E_x^\times \times (F_x^\times)^2$ par $\gamma_0 \mapsto (\gamma_0; \gamma_0^{-1}, \gamma_0^{-1})$ et qu'elle est égale à $I_{h_x *_{\rho} (h'_x), \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}$.

Les coefficients de Fourier des fonctions $I_{h_x, \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}$ sont donnés par :

Proposition V.14. – Soit h_x une fonction sphérique sur E_x^\times dont la transformée de Satake est de la forme $S_x^G(h_x) = X^{-2k_0}$.

Si $\chi : E_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ et $\chi'_1, \chi'_2 : F_x^\times \mapsto \mathbb{C}^\times$ sont trois caractères unitaires tels que $\chi|_{F_x^\times} = \chi'_1 \chi'_2$, l'intégrale

$$\iiint_{E_x^\times \times (F_x^\times)^2 / F_x^\times} d\gamma \cdot d\gamma'_1 \cdot d\gamma'_2 \cdot \chi(\gamma) \cdot \chi'_1(\gamma'_1) \cdot \chi'_2(\gamma'_2) \cdot I_{h_x, \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\gamma; \gamma'_1, \gamma'_2)$$

vaut suivant les cas :

(i) Si χ est ramifié :

$$0.$$

(ii) Si χ est non ramifié, mais χ'_1, χ'_2 sont ramifiés :

$$z_x(\chi)^{k_0} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right)} \cdot \varepsilon(\psi_x, \chi'_1) \cdot \varepsilon(\overline{\psi}_x, \chi'^{-1}_2).$$

(iii) Si χ, χ'_1 et χ'_2 sont non ramifiés :

$$z_x(\chi)^{k_0} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right)} \cdot \frac{1 + z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right)^{-1} \cdot q_x^{-1}}{1 + z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2}\right) \cdot q_x^{-1}}.$$

Démonstration. Pour tout entier v , notons $\mathbf{1}_x(v)$ la fonction sphérique sur E_x^\times dont la transformée de Satake est X^{-2v} , avec donc $h_x = \mathbf{1}_x(k_0)$. Si $v = v_x(\gamma)$, on a

$$I_{h_x, \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\gamma; \gamma'_1, \gamma'_2) = I_{\mathbf{1}_x(k_0 - v), \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(1; \gamma'_1, \gamma'_2).$$

Ainsi, $I_{h_x, \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\gamma; \gamma'_1, \gamma'_2)$ ne dépend de γ que via sa valuation, ce qui prouve (i).

Si χ est non ramifié, l'intégrale de l'énoncé est égale à

$$z_x(\chi)^{k_0} \cdot \iint_{F_x^\times \times F_x^\times} d\gamma'_1 \cdot d\gamma'_2 \cdot \chi'_1(\gamma'_1) \cdot \chi'_2(\gamma'_2) \cdot I_{\mathbf{1}_x(0), \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(1; \gamma'_1, \gamma'_2).$$

Alors, les assertions (ii) et (iii) apparaissent comme équivalentes au Corollaire V.12(ii) et (iii). \square

Enfin, on est amené à considérer en presque toutes les places $x \in |X|$ (celles qui ne sont pas dans S , avec nos notations habituelles), le produit de la fonction de $\gamma \in E_x^\times$

$$I_{h_x}^G(\gamma) = K_{h_x}^G(\gamma) = h_x(\gamma),$$

et de la fonction de $\gamma'_1, \gamma'_2 \in F_x^\times$

$$I_{h'_x, \psi_x}^H(\gamma'_1, \gamma'_2) = \int_{\mathrm{GL}_2(O_x)} dk \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x \times F_x} du_1 \cdot du_2 \cdot \psi_x(u_2 - u_1) \\ \cdot h'_x \left(k^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma'_1 & 0 \\ 0 & \gamma'_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot k \right).$$

Les coefficients de Fourier d'une telle fonction produit sont des produits de coefficients de Fourier, donc il suffit de calculer ceux des fonctions $I_{h'_x, \psi_x}^H(\gamma'_1, \gamma'_2)$. Quand h'_x est sphérique, ils sont donnés par la proposition suivante :

Proposition V.15. – *Supposons qu'en la place x , la fonction h'_x sur $H(F_x) = \mathrm{GL}_2(F_x)$ soit sphérique et que la forme différentielle ω_X s'annule à l'ordre $N_x \in \mathbb{Z}$.*

Etant donnés deux caractères multiplicatifs $\chi'_1, \chi'_2 : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$, l'intégrale

$$\iint_{F_x^\times \times F_x^\times} d\gamma'_1 \cdot d\gamma'_2 \cdot \chi'_1(\gamma'_1) \chi'_2(\gamma'_2) \cdot I_{h'_x, \psi_x}^H(\gamma'_1, \gamma'_2)$$

vaut suivant les cas :

(i) Si $S_x^H(h'_x) = (X_1 X_2)^{k_0} \cdot \frac{X_1^k X_2^{-k} + X_1^{-k} X_2^k}{2}$ avec $k \geq 1$, elle n'est non nulle que si χ'_1 et χ'_2 sont non ramifiés, et alors elle est égale à

$$q_x^{2N_x} \cdot z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right)^{-N_x} \cdot z_x(\chi'_1 \chi'_2)^{k_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \frac{q_x^{-k} + q_x^{-3k}}{2} \cdot z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right)^k \cdot \frac{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right)^{-1}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right) \cdot q_x^{-2}}.$$

(ii) Si $S_x^H(h'_x) = (X_1 X_2)^{k_0} \cdot \frac{X_1^k \cdot X_2^{1-k} + X_1^{1-k} X_2^k}{2}$ avec $k \geq 1$, elle n'est non nulle que si χ'_1 et χ'_2 sont non ramifiés, et alors elle est égale à

$$q_x^{2N_x} \cdot z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right)^{-N_x} \cdot z_x(\chi'_1 \chi'_2)^{k_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \frac{q_x^{\frac{1}{2}-k} + q_x^{\frac{3}{2}-3k}}{2} \cdot z_x(\chi'_1)^k \cdot z_x(\chi'_2)^{1-k} \cdot \frac{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right)^{-1}}{1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right) \cdot q_x^{-2}}.$$

(iii) Si $S_x^H(h'_x) = (X_1 X_2)^{k_0}$, elle est égale à

- 0 si $\chi'_1 \chi'_2$ est ramifié,
- $q_x^{2N_x} \cdot z_x(\chi'_1 \chi'_2)^{k_0} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{q_x})} \cdot \varepsilon(\psi_x, \chi'_1) \cdot \varepsilon(\overline{\psi_x}, \chi'_2)^{-1}$, si $\chi'_1 \chi'_2$ est non ramifié mais χ'_1, χ'_2 sont ramifiés,
-

$$q_x^{2N_x} \cdot z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right)^{-N_x} \cdot z_x(\chi'_1 \chi'_2)^{k_0} \cdot \frac{1 - \frac{1}{q_x} + \frac{z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right)^{-1}}{q_x} - \frac{1}{q_x^2}}{\left(1 - \frac{1}{q_x}\right)^2 \cdot \left(1 - z_x \left(\frac{\chi'_1}{\chi'_2} \right) \cdot q_x^{-2}\right)}$$

si χ'_1 et χ'_2 sont non ramifiés.

Démonstration. L'hypothèse sur ω_X signifie que le caractère additif ψ_x en la place x est trivial sur $\pi_x^{-N_x} \cdot O_x$ mais non trivial sur $\pi_x^{-N_x-1} \cdot O_x$.

Lorsque $N_x = 0$ et $k_0 = 0$, les formules de (i), (ii) et (iii) sont celles des Corollaires V.8 et V.10.

Les formules pour $N_x = 0$ et k_0 arbitraire s'en déduisent en observant que pour tout $\gamma \in F_x^\times$

$$I_{h'_x, \psi_x}^H(\gamma \gamma'_1, \gamma \gamma'_2) = I_{h'_x, \psi_x}^H(\gamma'_1, \gamma'_2)$$

où $h'_x{}^\gamma : g \mapsto h'_x(\gamma g)$ désigne la fonction sphérique déduite de h'_x par translation par γ , ce qui revient à multiplier sa transformée de Satake par $(X_1 X_2)^{-v_x(\gamma)}$.

Enfin, les formules pour N_x arbitraire se déduisent de celles pour $N_x = 0$, en observant que pour tout $\eta \in F_x^\times$, on a les égalités

$$\begin{aligned} & \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x \times F_x} du_1 \cdot du_2 \cdot \psi_x \left(\frac{u_2 - u_1}{\eta} \right) \cdot h'_x \left(\begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma'_1 & 0 \\ 0 & \gamma'_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= |\eta|^2 \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \int_{F_x \times F_x} du_1 \cdot du_2 \cdot \psi_x(u_2 - u_1) \\ & \cdot h'_x \left(\begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta^{-1} \gamma'_1 & 0 \\ 0 & \eta \gamma'_2 \end{pmatrix} \cdot w_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

□

7 Une conjecture pour le calcul de la moyenne sur les éléments rationnels, dans le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_r

Nous considérons maintenant le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_r via une extension E de F de degré r , ou plus généralement le cas d'un transfert automorphe d'un groupe de la forme $G = \prod_{i \in I_G} \mathrm{Res}_{E_i/F} \mathrm{GL}_1$ à un groupe $H = \mathrm{GL}_r$. Nous supposons que l'homomorphisme $Z_H = \mathbb{G}_m \rightarrow \prod_{i \in I_G} \mathbb{G}_m$ induit par l'homomorphisme de transfert ρ est le plongement diagonal, et que les extensions E_i de F sont non ramifiées en toutes les places.

On considère encore deux fonctions sphériques $h = \bigotimes_{x \in |X|} h_x$ et $h' = \bigotimes_{x \in |X|} h'_x$ dans les algèbres de Hecke sphériques $\mathcal{H}_\phi^G = \bigotimes_{x \in |X|} \mathcal{H}_{x,\phi}^G$ et $\mathcal{H}_\phi^H = \bigotimes_{x \in |X|} \mathcal{H}_{x,\phi}^H$ de $G(\mathbb{A})$ et $H(\mathbb{A})$.

En toute place $x \in |X|$, on dispose du noyau local de l'action de h_x par convolution,

$$K_{h_x}^G : E_x^\times \times E_x^\times \rightarrow \mathbb{C} \\ (t', t) \mapsto h_x(t^{-1} t'),$$

du noyau local de l'action de h'_x sur l'espace $\mathcal{L}_{K_{\delta,x}^H, \psi_x}(H(F_x))$

$$K_{h'_x}^{H, \psi_x} : \mathrm{GL}_r(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C} \\ (g', g) \mapsto \int_{N_r(F_x)} dn_x \cdot \psi_x(n_x) \cdot h'_x(g^{-1} \cdot n_x \cdot g'),$$

puis du noyau convolé

$$K_{h_x}^G *_\rho K_{h'_x}^{H, \psi_x} : G(F_x)^2 \times \mathrm{GL}_r(F_x)^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

défini dans la Définition IV.6 de l'Exposé IV. On rappelle que cette définition consiste à :

- décomposer spectralement $K_{h_x}^G$ en l'écrivant comme une intégrale sur les paramètres de Hecke λ_\bullet décrivant un produit de cercles unités indexés par les composantes des $E_{i,x} = E_i \otimes_F F_x$ sur F_x ,
- décomposer spectralement $K_{h'_x}^{H, \psi_x}$ en l'écrivant comme une intégrale sur les paramètres de Hecke λ'_\bullet décrivant un produit de r cercles unités,
- dans le produit $\{\lambda_\bullet\} \times \{\lambda'_\bullet\}$ des deux espaces d'intégration, se restreindre au graphe d'un homomorphisme

$$\{\lambda_\bullet\} \rightarrow \{\lambda'_\bullet\}$$

qui relève le morphisme ρ_x^* entre les algèbres de Hecke à la façon du Lemme II.1 de l'Exposé II,

- intégrer enfin sur $\{\lambda_\bullet\}$ pour obtenir le produit contracté $K_{h_x}^G *_\rho K_{h'_x}^{H, \psi_x}$ comme fonction définie sur $G(F_x)^2 \times \mathrm{GL}_r(F_x)^2$.

Bien sûr, $K_{h_x}^G *_\rho K_{h'_x}^{H, \psi_x}$ est défini de telle sorte qu'est toujours vérifiée l'identité

$$K_{h_x}^G *_\rho K_{h'_x}^{H, \psi_x} = K_{h_x *_\rho \rho_x^*(h'_x)}^G *_\rho K_{\mathbf{1}_x}^{H, \psi_x}.$$

On a pour tout $\gamma_0 \in G(F_x)$

$$(K_{h_x}^G *_\rho K_{h'_x}^{H, \psi_x})(\gamma', \gamma; g', g) = (K_{h_x}^G *_\rho K_{h'_x}^{H, \psi_x})(\gamma_0 \gamma', \gamma_0 \gamma; g', g)$$

et

$$(K_{h_x}^G *_\rho K_{h'_x}^{H, \psi_x})(\gamma_0 \gamma', \gamma; g', g) = (K_{h_{\gamma_0}}^G *_\rho K_{h'_x}^{H, \psi_x})(\gamma', \gamma; g', g)$$

où $h_x^{\gamma_0} : \gamma \mapsto h_x(\gamma_0 \gamma)$ désigne la fonction sphérique déduite de h_x par translation par γ_0 .

Enfin, on a pour tout $\gamma_0 \in F_x^\times = Z_H(F_x)$

$$\begin{aligned} (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{h'_x}^{H,\psi_x})(\gamma_0 \gamma', \gamma; g', g) &= (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{h'_x}^{H,\psi_x})(\gamma', \gamma; \gamma_0 g', g) \\ &= (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{h'_x}^{H,\psi_x})(\gamma', \gamma; g', \gamma_0^{-1} g). \end{aligned}$$

Maintenant, on peut introduire l'intégrale suivante

$$I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta, \gamma) = \int_{H(F_x)/Z_H(F_x)} dg_x \cdot q^{-\deg_Q(g_x)} \cdot (K_{h_x}^G *_{\rho} K_{h'_x}^{H,\psi_x})(\delta, 1; \gamma \cdot w_0 \cdot g_x, g_x)$$

comme fonction de $\delta \in G(F_x)$ et de $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in T_r(F_x) = (F_x^\times)^r$, où $T_r = T_H$ désigne le tore diagonal de $H = \mathrm{GL}_r$ et w_0 la matrice de permutation complète

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & \ddots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On a les identités qui se déduisent des précédentes

$$\begin{aligned} I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta, \gamma) &= I_{h_x *_{\rho} (h'_x), \mathbf{1}_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta, \gamma), \\ I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta, \gamma) &= I_{h_x^{\delta}, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(1, \gamma), \end{aligned}$$

et

$$I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\gamma_0 \delta, \gamma) = I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta, \gamma_0 \gamma)$$

pour tout $\gamma_0 \in F_x^\times = Z_H(F_x)$.

Nous pouvons maintenant proposer la conjecture suivante qui, dans le situation où nous sommes d'un transfert automorphe de $G = \prod_{i \in I_G} \mathrm{Res}_{E_i/F} \mathrm{GL}_1$ à $H = \mathrm{GL}_r$, complète la Conjecture IV.7 du Chapitre IV :

Conjecture V.16. – (i) *En toute place $x \in |X|$, l'expression $I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta, \gamma)$ devient une constante non nulle $\frac{1}{c_x}$ si on pose $h_x = \mathbf{1}_x$, $h'_x = \mathbf{1}_x$ et si on impose que toutes les valuations des composantes de δ et de γ valent 0.*

(ii) *En posant*

$$I_{h, h', \psi_r}^{G, H, \rho}(\delta, \gamma) = \prod_{x \in |X|} c_x \cdot I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta_x, \gamma_x)$$

qui est désormais une fonction bien définie de $\delta = (\delta_x)_{x \in |X|} \in G(\mathbb{A}) = \prod_{i \in I_G} \mathbb{A}_{E_i}^\times$ et de $\gamma = (\gamma_x)_{x \in |X|} \in T_r(\mathbb{A}) = (\mathbb{A}_F^\times)^r$, la fonctionnelle bilinéaire

$$\sum_{\substack{\chi \in \Pi_{\mathrm{aut}, K_0^G}(G/A_G) \\ \pi \in \Pi_{\mathrm{aut}, K_0^H}(H/A_H) \\ \pi = \rho * \chi}} \mathrm{Tr}_{\chi}(h) \cdot \mathrm{Tr}_{\pi}(h')$$

en $h = \bigotimes_{x \in |X|} h_x$ et $h' = \bigotimes_{x \in |X|} h'_x$ se calcule comme une moyenne

$$\text{Moyenne}_{\substack{\delta \in G(F) = \prod_{i \in I_G} F_i^\times \\ \gamma \in T_r(F) = (F^\times)^r}} \sum_{a \in A_G} I_{h, h', \psi_r}^{G, H, \rho}(a \delta, \gamma)$$

(au sens de la Conjecture IV.7 de l'Exposé IV).

(iii) Cette moyenne est égale à

$$\text{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G) \cdot \sum_{a \in A_G} \sum_{\substack{\gamma \in F^\times \\ \delta \in G(F)/F^\times}} J_{h^a, h', \psi_r}^{G, H, \rho}(\delta, \gamma)$$

où, pour un certain choix de constantes non nulles c'_x , la fonction $J_{h, h', \psi_r}^{G, H, \rho}(\delta, \gamma)$ de $\delta = (\delta_x)_{x \in |X|} \in G(\mathbb{A}) = \prod_{i \in I_G} \mathbb{A}_{E_i}^\times$ et de $\gamma = (\gamma_x)_{x \in |X|} \in \mathbb{A}_F^\times$ est le produit sur toutes les places $x \in |X|$ des

$$J_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta_x, \gamma_x) = c'_x c_x \cdot \int_{(F_x^\times)^r} d\gamma_1 \dots d\gamma_r \cdot \mathbf{1}(v_x(\gamma_1 \dots \gamma_r) + v_x(\text{Nm } \delta_x) = v_x(\gamma_x)) \cdot I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta_x, (\gamma_1, \dots, \gamma_r)).$$

Cette intégrale de définition de $J_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta_x, \gamma_x)$ n'est pas absolument convergente, mais on peut la définir comme la valeur en $s = 0$ de la fonction rationnelle en q_x^s

$$\int_{(F_x^\times)^r} d\gamma_1 \dots d\gamma_r \cdot \rho_B(\gamma_1, \dots, \gamma_r)^s \cdot \mathbf{1}(v_x(\gamma_1 \dots \gamma_r) + v_x(\text{Nm } \delta_x) = v_x(\gamma_x)) \cdot I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta_x, (\gamma_1, \dots, \gamma_r))$$

(qui converge pour $s < 0$ assez proche de 0), ou encore comme la série convergente

$$\sum_{\substack{v_1, \dots, v_r \in \mathbb{Z} \\ v_1 + \dots + v_r = v_x(\gamma_x) - v_x(\text{Nm } \delta_x)}} \int_{(F_x^\times)^r} d\gamma_1 \dots d\gamma_r \cdot \mathbf{1}(v_x(\gamma_1) = v_1, \dots, v_x(\gamma_r) = v_r) \cdot I_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta_x, (\gamma_1, \dots, \gamma_r)).$$

□

Si cette conjecture était vraie, l'existence du transfert automorphe de $G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_1$ à GL_r serait équivalente à ce qu'on puisse choisir les constantes c'_x de telle sorte qu'on ait toujours

$$J_{h_x, h'_x, \psi_x}^{G, H, \rho}(\delta_x, \gamma_x) = \begin{cases} (h_x * \rho_x^*(h'_x))(\delta'_x) & \text{s'il existe } \delta'_x \in G(F_x) \text{ tel que} \\ & \delta'_x \cdot \delta_x^{-1} \in F_x^\times \text{ et } v_x(\text{Nm } \delta'_x) = v_x(\gamma_x), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas de l'induction automorphe quadratique de GL_1 à GL_2 , cette propriété est vérifiée, comme il résulte des remarques qui suivent les énoncés des Corollaires V.8, V.10 et V.12. C'est bien sûr la raison pour laquelle on propose la conjecture ci-dessus.

Toujours dans le cas $r = 2$, on doit prendre en les places $x \in |X|$ où la forme différentielle ω_X est régulière :

- $c_x = \frac{1}{1 + \frac{1}{q_x}}$ si la place x est scindée dans E , d'après la Proposition V.7(ii),
- $c_x = 1 - \frac{1}{q_x}$ si la place x est inerte dans E , d'après la Proposition V.11,
- $c'_x = \left(1 - \frac{1}{q_x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right)$ si la place x est scindée dans E , d'après le Corollaire V.8(iii) et la remarque qui le suit,
- $c'_x = \left(1 - \frac{1}{q_x^2}\right)$ si la place x est inerte dans E , d'après le Corollaire V.12(iii) et la remarque qui le suit.

Remarques de conclusion

- Dans le cas de l'induction automorphe non ramifiée de GL_1 à GL_2 , il reste donc à prouver la Conjecture V.16 pour démontrer l'existence du transfert par la voie proposée dans le présent travail.

- Cette conjecture de réduction du global au local est difficile car elle vise à proposer une formule "géométrique" de calcul d'une mesure "limite" définie formellement à partir des coefficients d'une série génératrice ; or, si ces coefficients ont des expressions "géométriques" explicites, on ne sait prouver l'existence de leur limite formelle qu'en les réécrivant en termes spectraux.

- Il s'ajoute à cela la difficulté supplémentaire que, comme il est résumé au paragraphe IV.4, la mesure cherchée n'apparaît pas de manière isolée mais seulement comme élément d'un espace affine de dimension finie dont les points se distinguent mal les uns des autres.

- L'auteur ne pense pas qu'il soit possible de calculer directement les mesures "limites" qui sont éléments de cet espace affine. Il espère seulement que leur définition comme "limites" induit suffisamment de symétries pour permettre d'identifier l'espace affine qu'elles constituent.

Mais nous ne sommes pas parvenus jusqu'à présent à réaliser ce programme . . .

Références bibliographiques

- J. ARTHUR, “A trace formula for reductive groups I : terms associated to classes in $G(\mathbb{Q})$ ”, *Duke Mathematical Journal* **245**, p. 911-952 (1978).
- J. ARTHUR, “A trace formula for reductive groups II : application of a truncation operator”, *Compositio Mathematica* **40**, p. 87-121 (1980).
- J. ARTHUR, “An introduction to the trace formula”, prépublication, Université de Toronto (2005).
- A. BOREL, “Automorphic L-functions”, p. 27-61 in “Automorphic forms, representations and L-functions”, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **33**, volume 2, American Mathematical Society (1979).
- W. CASSELMAN et J.A. SHALIKA, “The unramified principal series of p -adic groups II : the Whittaker function”, *Compositio Mathematica* **41**, fascicule 2, p. 207-231 (1980).
- J.W. COGDELL et I.I. PIATETSKI-SHAPIRO, “The arithmetic and spectral analysis of Poincaré series”, Academic Press (1990).
- R. GODEMENT, “Notes on Jacquet-Langlands’ theory”, Institute for Advanced Study (1970).
- H. JACQUET, I.I. PIATETSKI-SHAPIRO et J.A. SHALIKA, “Rankin-Selberg convolutions”, *American Journal of Mathematics* **105**, p. 367-464 (1983).
- H. JACQUET et J.A. SHALIKA, “Rankin-Selberg convolutions : On Euler products and the classification of automorphic representations I”, *American Journal of Mathematics* **103**, p. 499-558 (1981).
- L. LAFFORGUE, “Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson”, *Astérisque* **243**, Société Mathématique de France (1997).
- L. LAFFORGUE, “Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands”, *Inventiones Mathematicae* **147**, fascicule 1, p. 1-242 (2002).
- R.P. LANGLANDS, “Problems in the theory of automorphic forms”, p. 18-61 in “Lectures in modern analysis and applications III”, LNM 170, Springer (1970).
- R.P. LANGLANDS, “On the functional equations satisfied by Eisenstein series”, LNM 544, Springer (1976).
- R.P. LANGLANDS, “Beyond endoscopy”, p. 611-697 in “Contributions to automorphic forms, geometry and number theory. A volume in honor of J.A. Shalika”, John Hopkins University Press (2004).
- R.P. LANGLANDS, “Un nouveau point de repère dans la théorie des formes automorphes”, *Bulletin Canadien de Mathématiques* **50**, n° 2, p. 243-267 (2007).
- G. LAUMON, “Cohomology of Drinfeld modular varieties I : geometry, counting of points and local harmonic analysis”, Cambridge University Press (1996).
- C. MOEGLIN et J.-L. WALDSPURGER, “Le spectre résiduel de $GL(n)$ ”, *Annales Scientifiques de l’ENS*, tome 22, p. 605-674 (1989).
- C. MOEGLIN et J.-L. WALDSPURGER, “Décomposition spectrale et séries d’Eisenstein”, *Progress in Mathematics*, volume 113, Birkhäuser (1993).
- I.I. PIATETSKI-SHAPIRO, “Multiplicity one theorems”, p. 209-212 in “Automorphic forms, representations and L-functions”, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **33**, volume 1, American Mathematical Society (1979).
- I. SATAKE, “Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p -adic fields”, *Publications Mathématiques de l’IHÉS* **18**, p. 5-70 (1963).
- F. SHAHIDI, “Functional equation satisfied by certain L-functions”, *Compositio Mathematica* **37**, n° 2, p. 171-207 (1978).

F. SHAHIDI, "On certain L-functions", *American Journal of Mathematics* **103**, n° 2, p. 297-355 (1981).

J.A. SHALIKA : "The multiplicity one theorem for GL_n ", *Annals of Mathematics* **100**, p. 171-193 (1974).

T. SHINTANI, "On an explicit formula for class 1 Whittaker functions on GL_n over p -adic fields", *Proceedings of the Japan Academy* **52**, p. 180-182 (1976).