Les topos de Grothendieck
et les rôles qu'ils peuvent jouer en mathématiques

Exposé de L. Lafforgue (préparé avec O. Caramello)
à l'Université de Nantes le 1er avril 2016

I. Symétries et invariants
II. Richesse et profondeur des topos
III. Les topos comme ponts

III : théorie développée par O.C.
I et II présentés dans la perspective de III

I. Symétries et invariants
0) La notion d'invariant des topos
1) Exemple d'invariant : la catégorie des points d'un topos
2) Autre exemple d'invariant : l'ensemble ordonné des sous-topos d'un topos
3) Les invariants les plus classiques des topos et des morphismes de topos : les invariants cohomologiques
4) Les invariants d'homotopie
5) Cinq exemples de propriétés invariantes : atomicité, bivalence, Boole, De Morgan, de type préfaisceau
6) Deux exemples de constructions invariantes : la Booléanisation, la Demorganisation

II. Richesse et profondeur des topos
1) Généralité des topos
2) Richesse et profondeur technique de la théorie des représentations des topos
3) Caractère calculatoire
4) Logique interne
5) Souplesse de la logique

III. Les topos comme ponts reliant des théories différentes
1) La notion d'équivalence de Morita
2) L'exploitation d'une équivalence de Morita
3) La dualité entre réel et imaginaire

I. Symétries et invariants

0 La notion d'invariant des topos

topos $\mathcal{E}$ $=$ type particulier de catégorie
$\cong$ catégorie des faisceaux d'ensembles sur un "site" $(\mathcal{C}, J)$
$\mathcal{C}$ = catégorie
J = topologie de Grothendieck (notion de recouvrement)

cas particulier : catégorie de préfaisceaux = foncteurs contravariants

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

morphisme de topos : $f : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$

$$\begin{array}{ccc} f = (f^* : \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1 & , & f_* : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2) \\ \| & & \| \\ \text{adjoint à gauche + exact} & & \text{adjoint à droite} \\ \text{“image réciproque”} & & \text{“image directe”} \end{array}$$

Les topos forment une 2-catégorie → notion d'équivalence de topos

$$\begin{array}{c}\text{notion d'invariant}\\ \text{des topos}\end{array} = \left\{\begin{array}{c}\text{objet}\\ \text{ou propriété}\\ \text{ou construction}\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{invariant par}\\ \text{équivalence}\\ \text{de topos}\end{array}$$

Exemples de topos :

- Ens
- BG = catégorie des ensembles discrets munis de l'action d'un groupe topologique prodiscret G
  $\Rightarrow$ topos = vaste généralisation des groupes
  N.B. : $BG_1 \cong BG_2 \Rightarrow G_1 \cong G_2$ si G_1, G_2 discrets mais ce n'est pas vrai si G_1, G_2 = gr. top.
- Les ensembles simpliciaux = topos
  leur réalisation géométrique = "point" de ce topos
- Le topos $\mathcal{E}_X$ des faisceaux sur un espace topologique X.
- Le topos $\mathcal{E}_{X/G}$ des faisceaux G-équivariants sur un espace topologique X muni de l'action continue d'un groupe topologique G.

1 La catégorie des points d'un topos (considérée à équivalence près)

$\mathcal{H}om\,(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ = catégorie (considérée à équivalence près)
= invariant de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

$\mathrm{pt}(\mathcal{E}) = \mathcal{H}om\,(\mathrm{Ens}, \mathcal{E})$
→ si $x : \mathrm{Ens} \to \mathcal{E}$, $(x^* : \mathcal{E} \to \mathrm{Ens})$ = "foncteur fibre".

Exemples :

- Si $\mathcal{E}$ = topos simplicial, pts $(\mathcal{E})$ = intervalles.
- Si $\mathcal{E} = BG$, G = groupe discret, un seul point x

$$\mathrm{Aut}\,(x) = G.$$

Beaucoup plus subtil si G = groupe prodiscret (exemple du topos de Schanuel)

- Le "topos des fréquences" de Connes et Consani $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$
  objets de $\mathcal{C}$ = intervalles Ω de $[0,+\infty)$
  $\mathrm{Hom}\,(\Omega,\Omega') = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot \Omega \subseteq \Omega'\}$
  recouvrements des intervalles au sens évident
  $\Rightarrow$ classes d'isomorphie des points de $\mathcal{E}$
  $= \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} / \hat{\mathbb{Z}}^\times$.
- Si $\mathcal{C}$ = $\mathbb{T}$-mod (Ens) = catégorie des modèles ensemblistes d'une théorie "géométrique" du premier ordre $\mathbb{T}$
  $\mathbb{T} \rightsquigarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ = "topos classifiant" de $\mathbb{T}$ qui vérifie en particulier

$$\mathcal{C} \cong \mathrm{pt}\,(\mathcal{E}_{\mathbb{T}}).$$

Si $\mathbb{T}$ = théorie du premier ordre, $\mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{T}'$ = théorie "géométrique" ayant la même collection de classes d'isomorphie de modèles.

- Si $\mathcal{E}$ = topos arbitraire, il existe **des** théories "géométriques" $\mathbb{T}$ telles que

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \mathcal{E}$$

avec en particulier

$$\mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathrm{Ens}) \cong \mathrm{pt}\,(\mathcal{E}).$$

2 L'ensemble ordonné des sous-topos d'un topos

Sous-topos d'un topos $\mathcal{E}$ = classe d'équivalence de morphisme
$j = (j^*, j_*) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$
$tq : j_*$ = foncteur pleinement fidèle

Exemple : Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$, $\mathcal{E}$ = sous-topos de $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$

$j_* : \mathcal{E}_{\mathcal{C},J} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$
= identification des faisceaux à des préfaisceaux

$j^* : \mathcal{E}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$
= faisceautisation des préfaisceaux

$\{$sous-topos de $\mathcal{E}\}$ = ensemble ordonné
= coalgèbre de Heyting
$(a,b) \longmapsto a \wedge b, a \bigvee b, a \backslash b$

$$\uparrow$$

$(a \backslash b) \le x \Longleftrightarrow a \le b \bigvee x.$

Théorème :

(i) Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$, sous topos de $\mathcal{E}$

$\longleftrightarrow$ topologies J' sur $\mathcal{C}$ telles que $J' \supseteq J$

(ii) (O.C.) Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, sous-topos de $\mathcal{E}$

$\longleftrightarrow$ théories $\mathbb{T}'$ "quotients" de $\mathbb{T}$ (même langage, plus d'axiomes).

3 Les invariants cohomologiques

$\mathcal{E}$ = topos $\rightsquigarrow \mathrm{Ab}\,(\mathcal{E})$ = catégorie des objets abéliens de $\mathcal{E}$

$(\mathcal{E}, \mathcal{O})$ = topos annelés $\rightsquigarrow \mathcal{M}od\,(\mathcal{E}, \mathcal{O})$

- $\mathrm{Ab}\,(\mathcal{E})$, $\mathcal{M}od\,(\mathcal{E}, \mathcal{O})$ ont "assez" d'injectifs.
- Les "6 opérations"
  - $\otimes$, $\mathcal{H}om \Rightarrow \otimes_L$, $R\,\mathcal{H}om$
  - si $f = (f^*, f_*) \Rightarrow Rf^*, Rf_*$

    plus éventuellement

    $Rf^!, Rf_!$

    et définition de "bons" coefficients "constructibles"

4 Les invariants homotopiques

5 Cinq exemples de propriétés invariantes

Si a = objet d'une topos $\mathcal{E}$,

$$\begin{aligned}\{\text{sous-objets de } \mathcal{E}\} &= \text{ensemble ordonné} \\ &= \text{algèbre de Heyting} \\ & \quad (b, b') \longmapsto b \wedge b', b \bigvee b', (b \Rightarrow b') \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \\ & \quad x \leq (b \Rightarrow b') \Longleftrightarrow a \wedge x \leq b\end{aligned}$$

avec en particulier

$$b \longmapsto \neg b = (b \Rightarrow \varnothing).$$

Définition : a = atome si et seulement si ses deux seuls sous-objets sont a et $\varnothing$.

Atomicité : Tout objet de $\mathcal{E}$ = réunion disjointe d'atomes.

Bivalence :

L'objet final de $\mathcal{E}$ est atomique	Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ bivalent $\Leftrightarrow \mathbb{T}$ complète au sens géométrique (+ $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ atomique bivalent $\Rightarrow \mathbb{T}$ complète au sens du premier ordre)

Boole :

$$\forall\ (b \subseteq a),\ a = b \vee \neg b$$

Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$,
loi du tiers exclu
$\forall\, \varphi,\ \exists\, \psi$
$\varphi \wedge \psi \vdash\!\!\!\longrightarrow \bot$
$\top \vdash\!\!\!\longrightarrow \varphi \vee \psi$.

De Morgan :

$$\forall\ (b \subseteq a),\ a = \neg b \vee \neg\neg b$$

De type préfaisceau :

Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, équivalent à

- les modèles ensemblistes "finiment présentables" de $\mathcal{E}$ ($\mathrm{Hom}\,(M, \bullet)$ commute aux colim filtrées) sont globalement conservatifs
- les modèles finiment présentables sont présentés par des formules (générateurs et relations)
- toute propriété préservée par les homomorphismes de $\mathbb{T}$-modèles est définissable par une formule de $\mathbb{T}$

(colonne de droite : O.C.)

6 Deux exemples de constructions invariantes

$\mathcal{E} \longmapsto$ "Booléanisation" $\mathcal{E}_{\neg\neg}$ de $\mathcal{E}$ (Lawvere, Tierney)

= sous-topos canonique de $\mathcal{E}$ vérifiant le loi de Boole

$\longmapsto$ "De Morganisation" de $\mathcal{E}$ (O.C.)

= sous-topos canonique de $\mathcal{E}$, contenant $\mathcal{E}_{\neg\neg}$, vérifiant la loi de De Morgan

d'où :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{T} & \longmapsto & \left.\begin{array}{l}\text{Booléanisation de } \mathbb{T} \\ \text{Demorganisation de } \mathbb{T}\end{array}\right\} = \text{théories quotients de } \mathbb{T} \\ \text{théorie géométrique} & & \end{array}$$

Exemple : (O.C., Johnstone)

Si $\mathbb{T}$ = théorie des corps

- Demorganisation de $\mathbb{T}$ = théorie des extensions algébriques des corps $\mathbb{F}_p$.
- Booléanisation de $\mathbb{T}$ = théorie des clôtures algébriques des corps $\mathbb{F}_p$.

II. Richesse et profondeur des topos

1 Généralité des topos

- notion de crible d'un objet a d'une catégorie $\mathcal{C}$
  notion de topologie de Grothendieck J sur $\mathcal{C}$
  notion de faisceau sur un site $(\mathcal{C}, J)$
  notion de topos des faisceaux $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$.
- La notion de topos est très souple et stable.
- En particulier, elle est stable par "descente".

Exemple : topos associé à un "groupoïde topologique" $\mathcal{G}$ = topos des faisceaux équivariants sur $\mathcal{G}$

Exemple : topos du quotient d'un espace topologique X par une relation d'équivalence R.

Après la notion topologique de site, vient la notion (a priori complètement différente) de théorie du premier ordre

$\mathbb{T}$	=	langage (ou "signature") du premier ordre
	+	axiomes (consistant en des implications entre "formules" $\varphi \longmapsto \psi$)

A toute théorie du premier ordre $\mathbb{T}$, on peut associer

$$\mathbb{T}\text{-mod (Ens)} = \text{catégorie des modèles ensemblistes de } \mathbb{T}$$

et plus généralement

$$\mathbb{T}\text{-mod } (\mathcal{E}) = \text{catégorie des modèles de } \mathbb{T} \text{ dans un topos arbitraire } \mathcal{E}.$$

Si $\mathbb{T}$ est "géométrique" (i.e. :

les formules φ, ψ des axiomes $\varphi \longmapsto \psi$
ne font intervenir que des

- conjonctions finitaires $\wedge$
- disjonctions infinitaires $\bigvee$
- quantificateur $\exists$

mais pas de $\forall$, $\Rightarrow$ ou $\neg$),

tout morphisme de topos

$$f : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$$

induit un foncteur

$$f^* : \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2) \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1)$$

si bien que

$$\mathbb{T}\text{-mod} = \text{2-foncteur sur la 2-catégorie des topos.}$$

Théorème. – (~ 1975 : Lawvere, Reyes, Makkai, Joyal, Cole, Bénabou, ... à partir de Hakim, Grothendieck)

(i) *Si* $\mathbb{T}$ = *théorie "géométrique" arbitraire*

$$\mathbb{T}\text{-mod} = 2\text{-}\textit{foncteur}\text{ représentable } \textit{par un topos } \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \textit{ unique à équivalence près}$$

$$= \textit{“topos classifiant” de } \mathbb{T} \textit{ caractérisé par}$$

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{H}om\,(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}})\,, \quad \forall\ \mathcal{E}.$$

Tous les modèles de $\mathbb{T}$ *dans les* $\mathcal{E}$ *se déduisent d'un unique modèle de* $\mathbb{T}$ *dans* $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ = *modèle "universel"* $M_{\mathbb{T}}$.

(ii) (généralise le théorème de complétude de Gödel)
Une implication entre formules géométriques

$$\varphi \longmapsto \psi$$

est démontrable dans la théorie géométrique $\mathbb{T}$ *si et seulement si elle est vérifiée par* $M_{\mathbb{T}}$.

Remarques :

(i) $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ = topos associé au "site syntactique" $(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$ construit explicitement à partir de $\mathbb{T}$.

(ii) Tout topos est le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ d'une infinité de théories géométriques $\mathbb{T}$.

Une troisième manière générale de construire ou reconstruire les topos : les "quantales"

$\mathcal{E}$ = topos
b = "borne" de $\mathcal{E}$ = objet de $\mathcal{E}$ tel que tout objet de $\mathcal{E}$ soit un sous-quotient d'un produit de sous-objets de b
Q = ensemble ordonné des sous-objets de $b \times b$ (= "relations" dans b)

muni de

- $\bigvee, \wedge$,
- composition des relations (associative, avec la diagonale $b \hookrightarrow b \times b$ pour élément neutre)
- involution induite par la permutation de $b \times b$

= "quantale" modulaire.

Théorème. – (Freyd, Scedrov)

Q avec sa structure de quantale modulaire suffit à reconstruire $\mathcal{E}$ muni de la "borne" b.

2 Richesse et profondeur de la théorie des représentations des topos

Toute présentation de $\mathcal{E}$ par un site $(\mathcal{C}, J)$ engendre une infinité d'autres présentations de $\mathcal{E}$:

- le "lemme de comparaison" de Grothendieck associé au choix de n'importe quelle

$$\mathcal{C}' = \text{sous-catégorie pleine de } \mathcal{C} \text{ qui est “séparante”}$$

- tout choix d'une famille d'objets de $\mathcal{E}$ qui est "génératrice" définit une nouvelle présentation de $\mathcal{E}$.

Proposition. – (O.C.)

Si $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$	=	topos de type préfaisceau
alors $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$	=	topos des préfaisceaux sur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$
si $\mathcal{C}$	=	catégorie des modèles ensemblistes finiment présentables de $\mathbb{T}$

Exemple : N'importe quelle théorie "algébrique" $\mathbb{T}$.

Le second principe général est le suivant :

$$\text{Si} \quad \mathcal{E} \cong \mathcal{E}_{\mathcal{C},J} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_{\mathbb{T}},$$

le calcul ou l'expression d'invariants de $\mathcal{E}$ en termes de $(\mathcal{C}, J)$ ou $\mathbb{T}$ est souvent techniquement profond et subtil et donne des résultats qui peuvent être très surprenants.

Selon O.C., c'est à travers ces calculs que les topos deviennent de véritables machines à engendrer de nouvelles ntions et de nouveaux résultats.

Exemple classique :

La formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz ...

Exemples de spécialisations de propriétés invariantes dans les cas

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_X \ (\text{“topos continus”}) \text{ avec } X = \text{espace top}$$

et

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C}} \ (\text{“topos discrets”}) \text{ avec } \mathcal{C} = \text{catégorie}$$

Caractérisations de propriétés invariantes :

Atomicité :

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_X$ Tout ouvert de X est réunion disjointe d'ouverts non vides minimaux	$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ $\mathcal{C}$ = groupoïde (toute flèche est un isomorphisme)

Bivalence :

X a seulement deux ouverts : $\varnothing$ et X	$\forall\ a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ $\exists\ (a \to b)$ et $(b \to a)$

Boole :

Tout ouvert de X est fermé	$\mathcal{C} =$ groupoïde

De Morgan :

La clôture $\bar{U}$ de tout ouvert U de X est encore un ouvert	$\forall \left(\begin{array}{ccc} b & \searrow & \\ & & a \\ b' & \nearrow & \end{array}\right)$ $\exists \left(\begin{array}{ccccc} & & b & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ c & & & & a \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & b' & & \end{array}\right)$ commutatif

De type préfaisceau :
X admet une base d'ouverts dont tout élément est "supercompact"
($\Leftrightarrow$ tout recouvrement comprend l'objet).

Théorème. –
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie telle que tout

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & b \\ a & & \\ & \searrow & b' \end{array} \qquad \textit{se complète en} \qquad \begin{array}{ccccc} & & b & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ a & & & & c \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & b' & & \end{array}$$

Alors :

(i) (Barr, Diaconescu)
Si J = topologie de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ pour laquelle toute famille non vide de flèches $\to a$ couvre a,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}},J} = \textit{topos atomique}$$

(ii) (O.C.)
Sous ces conditions, $\mathcal{E}$ est bivalent si et seulement si

$$\forall\, b, b' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \qquad \textit{il existe} \qquad \begin{pmatrix} b & \searrow & \\ & & c \\ b' & \nearrow & \end{pmatrix}.$$

(iii) (O.C.)
Le foncteur canonique

$$\ell : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}},J} = \mathcal{E}$$

est pleinement fidèle si et seulement si toute flèche de $\mathcal{C}$ est un monomorphisme strict.
De plus, les images sont alors des atomes de $\mathcal{E}$.

(iv) (O.C.)
Il existe des conditions nécessaires et suffisantes sur $\mathcal{C}$ pour que

$$\begin{array}{rcl} \forall\, x & = & \textit{point de } \mathcal{E} \\ G & = & \mathrm{Aut}\,(x) \textit{ avec la topologie prodiscrète naturelle} \end{array}$$

on ait automatiquement

$$x^* : \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}},J} \longrightarrow BG$$

est une équivalence.
Autrement dit, le topos $\mathcal{E}$ est "galoisien".

Exemple : Toutes ces conditions sont vérifiées par de très nombreuses catégories classiques :

- $\mathcal{C}$ = catégorie des groupes finis et de leurs plongements,
- $\mathcal{C}$ = catégorie des graphes finis et de leurs plongements,

etc.

3 Caractère calculatoire

Toute opération

$$(\mathcal{C}, J) = \text{site} \longmapsto \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C},J} = \text{topos associé}$$

peut être pensée comme une sorte de complétion

$$\begin{pmatrix} \text{monde "réel"} \\ \text{de } (\mathcal{C}, J) \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} \text{monde "imaginaire"} \\ \text{de } \mathcal{E} \end{pmatrix}$$

qui permet beaucoup plus de calculs car :

- $\mathcal{E}$ a des limites et colimites arbitraires,
- $\mathcal{E}$ a une exponentielle (ou $\mathcal{H}om$ interne)

$$(a, b) \longmapsto \mathcal{H}om\,(a, b),$$

- $\mathcal{E}$ a un "classificateur des sous-objets" (Lawvere)
  Ω = objet de $\mathcal{E}$ qui représente le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens} \\ a & \longmapsto & \{\text{sous-objets de } a\} \end{array}$$

  (Exemple : Si $\mathcal{E} = \mathrm{Ens}$, $\Omega = \{0, 1\}$.)

Il existe aussi des opérations "externes" sur les topos :

- limites finies (éventuellement "pondérées")
- colimites (en particulier, théorie de la "descente").

4 La logique interne des topos

On peut la voir comme la structure d'algèbre de Heyting interne à $\mathcal{E}$ de Ω :

$$\begin{array}{rcl} \wedge & : & \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega \\ \vee & : & \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega \\ \Rightarrow & : & \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega \\ \ulcorner & : & \Omega \longrightarrow \Omega \end{array}$$

Plus exactement, la logique interne de $\mathcal{E}$ est l'ensemble des propriétés de Ω muni de sa structure d'algèbre de Heyting.

En particulier, les "valeurs de vérité" de cette logique sont les sections de la fèche de structure

$$\Omega \longrightarrow \text{objet final de } \mathcal{E}.$$

Si $\mathcal{E} = \mathrm{Ens}$, $\Omega = \{0, 1\}$ et objet final = $\{0\}$ donc il y a seulement deux valeurs de vérité, le vrai et le faux.

Mais, dans le cas général, il peut y avoir une infinité de telles valeurs ...

5 Souplesse de la logique

La logique en tant que telle est non structurée.

Toute expression formelle (indépendamment de toute considération de vrai ou de faux) est un objet d'étude de la logique. Il est donc très facile d'engendrer des objets logiques, en particulier des théories : toute famille d'axiomes définit une théorie.

Ainsi, l'ontologie mathématique de la logique est beaucoup plus large que celle de toute autre domaine des mathématiques.

Néanmoins, la théorie des topos classifiants permet de structurer un contenu logique de façon maximale : le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ d'une théorie $\mathbb{T}$ est un objet géométrique qui incarne tout le contenu de sens de $\mathbb{T}$ et seulement lui.

Il y a donc une dualité entre

- le niveau non structuré de la syntaxe (les théories $\mathbb{T}$),
- le niveau structuré (par les propriétés des topos) de la sémantique représentée universellement par les topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$.

Modifier une structure algébrique est en général difficile.

En revanche, modifier une théorie logique en ajoutant, retranchant ou altérant des axiomes ou le langage de la théorie est très facile.

Pourtant il y a correspondance entre notions et opérations logiques d'une part, notions et opérations dans et sur les topos d'autre part.

Cela permet d'exploiter la flexibilité de la logique pour fabriquer des structures ayant un ensemble de propriétés souhaitées.

Par exemple, des structures présentées en termes de générateurs et relations peuvent être construites via les topos classifiants.

Exemple récent : (O.C.)

La réinterprétation et généralisation de la construction de Nori en théorie des motifs en termes logiques.

→ Conséquence : critère nécessaire et suffisant pour qu'existe une catégorie de motifs mixtes sur un corps de base arbitraire.

On note enfin que la théorie des topos classifiants donne naissance à une nouvelle typologie des théories mathématiques : on regroupe les théories suivant les propriétés de leur topos classifiant.

Exemple :

- les théories de type préfaisceau,
- les théories atomiques bivalentes (qui comprennent le formalisme galoisien de Grothendieck mais permettent aussi de classifier des théories linéaires : la distinction entre linéaire et non linéaire vient en partie d'un choix de langage et elle s'efface en partie lorsque l'on passse aux topos classifiants).

III. Les topos comme ponts

1 La notion d'équivalence de Morita

Définition. –

Deux théories géométriques $\mathbb{T}$ et $\mathbb{T}'$ sont équivalentes au sens de Morita si

- $\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}$,
- *autrement dit, si elles ont mêmes catégories de modèles dans tout topos.*

N.B. Deux théories peuvent être équivalentes au sens de Morita sans être bi-interprétables, autrement dit sans qu'un "dictionnaire" permette de passer de l'une à l'autre.

Plus généralement, on peut parler d'équivalence de Morita chaque fois que deux topos présentés par des sites $(\mathcal{C}, J)$, des théories $\mathbb{T}$, des "quantales", etc. sont équivalents.

Tout topos présenté d'une certaine façon engendre une infinité d'autres manières de le présenter, et donc une infinité d'équivalences de Morita.

Remarque :

Les équivalences de Morita que l'on connaît jusqu'à présent sont engendrées le plus souvent par des faits généraux relativement simples :

- le lemme de comparaison de Grothendieck,
- le choix d'une famille d'objets du topos qui est génératrice,
- le théorème de représentation des topos classifiants des théories de type préfaisceau en termes de leurs modèles ensemblistes finiment présentables,
- plus le théorème (plus particulier mais plus sophistiqué et profond) sur les équivalences galoisiennes $\mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, J^{\mathrm{at}}} \cong BG$.

Exemple :

$$\left.\begin{array}{r} \text{dualités de Stone} \\[1em] \text{variantes de la} \\ \text{dualité de Gelfand} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{engendrés par le lemme} \\ \text{de comparaison} \end{array}$$

2 L'exploitation d'une équivalence de Morita

On suppose connue une équivalence de Morita

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}' \qquad \left(\begin{array}{c} \text{qui, dans la pratique connue} \\ \text{jusqu'à présent, résulte} \\ \text{souvent de faits généraux simples} \end{array}\right)$$

entre deux topos $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ présentés par des sites $(\mathcal{C}, J), (\mathcal{C}', J')$ ou des théories $\mathbb{T}, \mathbb{T}'$ différents.

On choisit des invariants des topos.

On exprime ces invariants en termes des sites ou théories de présentation de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

N.B. C'est dans cette expression ou caractérisation en termes de sites des invariants considérés que réside le travail techniquement difficile, souvent subtil, et qui engendre fréquemment des surprises.

Exemple : Si $\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ (préfaisceau sur $\mathcal{C}$)

Boole :

$$\begin{array}{c}\text{loi du tiers exclu}\\ \text{pour } \mathbb{T}\end{array} \iff \mathcal{C} = \text{groupoïde}$$

$$\begin{array}{c}\mathbb{T}\text{ complète au}\\ \text{sens géométrique}\end{array} \iff \begin{array}{c}\forall\, a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\\ \exists\,(a \to b) \wedge (b \to a)\end{array}$$

Exemple : Si $\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, J^{\mathrm{at}}}$

$$\begin{array}{c}\mathbb{T}\text{ complète au}\\ \text{sens du premier ordre}\end{array} \iff \forall\, b, b', \exists \begin{pmatrix} b & \searrow & \\ & & a \\ b' & \nearrow & \end{pmatrix}$$

Exemple : Si $\mathbb{T}$ de type préfaisceau

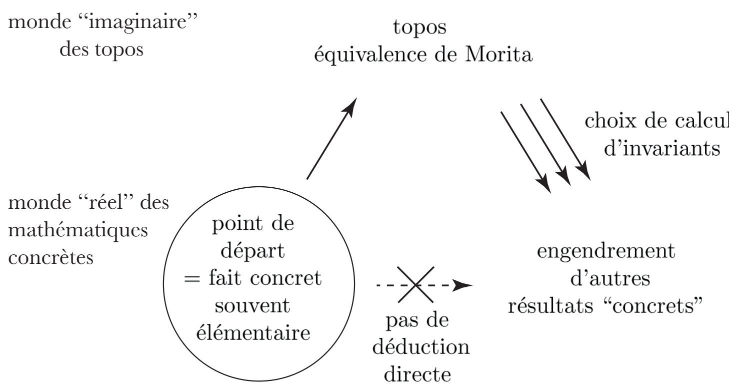
$$\begin{array}{c}\text{modèle finiment}\\ \text{présentable}\end{array} \iff \begin{array}{c}\text{modèle présenté}\\ \text{par une formule}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{propriétés préservées par les}\\ \text{homomorphismes de modèles}\end{array} \iff \begin{array}{c}\text{propriétés définissables}\\ \text{par des formules}\end{array}$$

3 La dualité entre réel et imaginaire

Dans la pratique :

- on part d'une équivalence, ou dualité, ou correspondance (relativement élémentaire) dans le monde "réel" des théories mathématiques concrètes,
- on relève cette équivalence, ou dualité, ou correspondance dans le monde "imaginaire" des topos en une équivalence de Morita
$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}',$$
ce qui signifie généralement que l'équivalence dont on est parti se déduit de $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$ par choix d'un certain invariant,
- on considère d'autres invariants des topos et on les calcule ou exprime dans les termes des sites ou théories qui présentent $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, obtenant ainsi d'autres équivalences, dualités ou correspondances concrètes qui sont souvent surprenantes et ne peuvent se déduire directement de l'équivalence concrète dont on est parti.



Remarque :

Partant d'un topos ou d'une équivalence de Morita, le calcul ou l'expression en termes de sites de présentation de tel ou tel invariant est souvent techniquement difficile mais faisable.

En revanche, remonter dans l'autre sens d'un résultat mathématique très sophistiqué attendu (ex : Langlands) à une équivalence de Morita qui pourrait l'engendrer est en général irréalisable directement.

Exemple (O.C.) d'approche envisagée pour le problème de "l'indépendance de ℓ" des théories de cohomologie ℓ-adique = foncteurs $H^\bullet(\bullet, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$.

La difficulté est que ces théories sont à coefficients dans les corps $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, qui sont différents les uns des autres.

On cherche

- une théorie de type préfaisceau $\mathbb{T}$ telle que les modèles finiment présentables de $\mathbb{T}$ soient les sous-objets de présentation finie des $H^\bullet(\bullet, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$,
- une théorie atomique bivalente $\mathbb{T}'$ telle que

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \cong \mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, J^{\mathrm{at}}} \quad \text{où} \quad \mathcal{C} = \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathrm{Ens}), \quad J^{\mathrm{at}} = \text{topologie atomique}$$

et les $H^\bullet(\bullet, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ soient des points de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}'}$.

Cela impliquerait toutes les propriétés d'indépendance de ℓ attendues.