L'invisible en mathématiques

par Laurent Lafforgue (Nanterre, jeudi 12 mars 2009)

Je remercie chaleureusement M. Jean-François Mattéi et les autres organisateurs du colloque « Platon aujourd'hui » pour leur invitation. Prendre la parole devant vous est pour moi un grand honneur très intimidant.

À la suggestion du Professeur Mattéi, je vais tenter d'évoquer « l'invisible en mathématiques ». Je ne vais pas le faire comme un philosophe spécialiste de Platon que je ne suis certes pas, mais comme un simple mathématicien praticien. C'est à vous philosophes qu'il appartiendra de juger si ce que je vais dire est platonicien ou pas.

Il convient d'abord de préciser le sens que je donne aux deux mots qui constituent le titre de mon intervention : « l'invisible en mathématiques ».

Les mathématiques sont une science au sens classique – un ensemble organisé de connaissances, caractérisé par le choix de ses objets d'étude et de ses règles internes de formation et de validation des savoirs. Les sciences modernes de la nature – celles nées avec Galilée – se sont appuyées sur les mathématiques et ont cherché à formuler leurs lois dans le langage de celles-ci, mais les mathématiques ne sont ni une science moderne ni une science de la nature.

Selon une formule de l'un des mathématiciens les plus fascinants du XX^{e} siècle, Alexandre Grothendieck, les mathématiques ont pour objets d'étude fondamentaux le nombre, la forme et la grandeur. Le mot « nombre » est ici entendu au sens le plus élémentaire : il s'agit des nombres entiers qui, dans le langage courant, servent à compter – 1, 2, 3, 4, etc. La science des nombres en ce sens le plus simple s'appelle l'arithmétique. La science des formes s'appelle la géométrie. La science des grandeurs s'appelle l'analyse. Si les mathématiques constituent bien une science, et non une juxtaposition arbitraire de trois sciences distinctes, c'est parce qu'il existe d'étroites relations entre le nombre, la forme et la grandeur et que l'étude de ces relations occupe une grande partie de la science mathématique. Certains s'étonneront peut-être de ne pas entendre citer l'algèbre au même rang que l'arithmétique, la géométrie et l'analyse. Il est vrai que – en tant que science du calcul et des structures – l'algèbre a pris une importance toujours plus grande dans le développement moderne des mathématiques. Mais le calcul reste second dans la mesure où il porte d'abord sur des entités mathématiques primordiales telles que les nombres ou les grandeurs. Les structures, quant à elles, peuvent être considérées comme faisant partie des formes géométriques : elles se visualisent d'ailleurs souvent sous la forme de diagrammes composés de flèches reliant divers symboles.

Les mathématiques se caractérisent également par les règles qui les régissent – des règles qui sont les plus contraignantes de toutes les sciences. Pour qu'une notion soit mathématique, il faut qu'elle ait reçu une définition qui la contienne entièrement. Dans le langage courant, nous comprenons les mots que nous entendons dans la mesure où chacun évoque pour nous une expérience, ou plutôt une multitude d'expériences personnelles, vivantes, sensibles ; autrement dit le langage courant fonctionne par allusions, ses mots sont toujours des demi-mots, ils désignent les réalités sensibles mais ne les contiennent pas. Dans les mathématiques, au contraire, le pouvoir d'évocation et d'allusion du langage est formellement révoqué : un mot n'acquiert droit de cité que s'il reçoit une définition qui détermine son sens complet, en se fondant uniquement sur les sens des mots qu'elle emploie, des sens eux-mêmes déterminés par d'autres définitions déjà données et considérées comme admises. Les règles régissant les relations élémentaires entre les mots, c'est-à-dire les règles de la logique, sont aussi explicites. Sont admis comme raisonnements et développements mathématiques les textes qui, portant sur des objets bien définis, montrent certaines des conséquences nécessaires de leurs définitions, obtenues par une chaîne de combinaisons logiques explicitables ligne à ligne. Bref, un texte mathématique doit apparaître comme transparent, formellement dépourvu d'arrière-monde ou plutôt d'arrière-texte. Autrement dit encore, il doit se tenir exclusivement dans le visible. Ce qui rend d'autant plus paradoxal l'énoncé du titre de mon intervention : « l'invisible en mathématiques ».

Mais quel sens précis donner au « visible » et à « l'invisible » ?

Le visible est ce qui est susceptible d'être vu. Vu par les yeux du corps. Ou bien vu par la pensée, c'est-à-dire saisi par la pensée et compris clairement, ce qui suppose une mise à distance. L'invisible est ce qui n'est susceptible d'être ni vu par les yeux du corps ni saisi par la pensée. Est invisible tout particulièrement ce que la personne humaine ne peut considérer à distance en le détachant de soi, donc tout ce qu'elle éprouve – la joie, la souffrance, les qualités sensibles des choses et des êtres, etc.

En mathématiques, ce qui a déjà été vu par les yeux – ceux des mathématiciens engagés dans la transmission et le développement de la tradition mathématique, et se passant le relai de génération en génération – est l'ensemble des textes mathématiques, c'est-à-dire les textes qui portent sur des objets mathématiques et qui respectent les règles internes de la discipline. Ces textes mathématiques comportent des dessins, des figures et des diagrammes, mais aussi des formules, et surtout des phrases qui traitent – toujours au présent et sur un mode impersonnel – de différentes notions définies dans le texte ou dans d'autres auquel il fait explicitement référence ; ces phrases font le récit de propriétés de ces notions, et de raisonnements serrés par lesquels ces propriétés se déduisent des définitions de manière irrécusable. Dans la mesure où les narrations en mots, phrases, paragraphes et chapitres qui composent l'essentiel des textes mathématiques consistent en des affirmations dépourvues d'ambiguïtés et en des enchaînements logiques qui forcent l'acquiescement, elles appartiennent à la catégorie des « choses vues par les yeux ».

Comme dans toute science, il existe une disproportion incommensurable entre ce qui est déjà vu par les yeux et ce qui est seulement susceptible de l'être : toutes les définitions, propriétés et démonstrations susceptibles d'être un jour couchées sur le papier, d'être objectivées, mais qui ne le sont pas encore et ne le seront peut-être jamais. Paradoxalement, les mathématiciens perçoivent cette disproportion comme d'autant plus abyssale que leurs connaissances s'enrichissent et s'approfondissent. C'est grâce à elle que les mathématiques continuent d'exister en tant que science vivante. Appelons donc « visible par les yeux » tout ce qui est susceptible d'être écrit et lu sous forme de textes mathématiques.

Appelons « visible par la pensée » ce qui est susceptible d'être considéré par elle, saisi et compris clairement. Il est très remarquable et très important que, particulièrement en mathématiques, ce qui est vu ou visible par les yeux – c'est-à-dire les textes tels qu'ils sont écrits ou susceptibles d'être écrits – diffère de ce qui est réellement vu et compris par la pensée ou susceptible de l'être. On peut lire une définition mathématique – qui, nous l'avons dit, fait bien plus que désigner l'objet auquel elle se rapporte puisque, formellement, elle le contient – et ne pas saisir du tout son sens, ni comprendre pourquoi diable elle a été posée. Et non seulement cela peut arriver mais, en fait, cela arrive chaque fois qu'un mathématicien, même professionnel, lit une définition vraiment nouvelle pour lui. Immanquablement, une telle définition nouvelle produit d'abord un effet d'étrangeté et de dépaysement, elle donne un sentiment de bizarrerie. De même, on peut suivre ligne à ligne une démonstration, vérifier soigneusement que les arguments s'enchaînent bien les uns à la suite des autres, et garder néanmoins le sentiment que cette démonstration nous échappe, que nous serions incapable de la reproduire à moins de l'apprendre par coeur, que nous ne l'avons pas saisie dans son principe ni dans sa ligne. Même si vous qui m'écoutez n'êtes pas mathématiciens, vous avez étudié des mathématiques sur les bancs des écoles et des lycées, et je suis sûr que vous avez connu des expériences semblables à celles que j'évoque. Au bout d'un temps plus ou moins long, il peut et il doit néanmois se produire – surtout si le texte mathématique est bon – que la définition ou la démonstration qui paraissaient obtuses et hermétiques s'éclairent et qu'elles s'insèrent désormais dans notre paysage mathématique intérieur sous la forme d'images mentales reliées à celles qui nous étaient déjà familières. Ces images mentales diffèrent du texte mathématique écrit et ne peuvent le remplacer, en particulier elles ne sont pas discursives : une démonstration qui occupe sur le papier des centaines de pages peut fort bien donner naissance à une image mentale limpide dans la pensée d'un lecteur qui l'étudie. Une telle démonstration a d'ailleurs nécessairement procédé d'une image mentale qui s'est imposée dans la pensée de son auteur comme fruit de ses efforts, parallèlement au processus de rédaction. Les textes mathématiques sont écrits par des chercheurs mathématiciens comme objectivations d'images mentales qui naissent, se combinent et s'engendrent mutuellement dans la pensée mais qui ne peuvent pas être explicitées comme telles.

En bref, un mathématicien écrit autre chose que ce qu'il pense, et son entendement voit autre chose que ce qu'il lit.

Cette réalité est d'autant plus étonnante et paradoxale qu'un mathématicien cherche toujours à mettre des mots sur les choses qu'il perçoit d'abord confusément, comme à travers un brouillard qu'il s'agit de déchirer, afin que la lumière du langage éclaire leurs contours et les rende peu à peu familières et tangibles. Dans son effort, un mathématicien parvient effectivement à trouver des mots qui contiennent les objets de sa recherche et qui donnent prise sur eux, mais ces mots sont en quelque sorte extérieurs à lui, ils ne sont jamais que des équivalents, de nature différente, des images qui ont germé et grandi dans sa pensée. À son tour, celui qui veut apprendre lit les mots tracés sur le papier, ou éventuellement il les écoute à l'occasion de cours, de conférences ou de simples échanges informels devant un tableau, il fixe son attention sur des formules, des figures ou des diagrammes ; il ne les comprend d'abord pas puis, par sauts brusques, des images nouvelles prennent forme dans sa pensée à la suggestion des mots et des figures, jusqu'à ce que les mots aient trouvé une traduction satisfaisante en images et que la pensée estime que, désormais, elle voit.

Toute recherche mathématique, et même toute transmission d'une personne à une autre, exige cette double traduction : des textes objectivés aux images mentales et des images mentales aux textes objectivés. À la différence des textes qui, une fois écrits, appartiennent à tous, les images mentales sont personnelles et impossibles à communiquer autrement que par le truchement des textes, si bien que les lecteurs d'un texte mathématique finissent, quand ils le comprennent, par se le représenter sous la forme d'images mentales qui ne sont sans doute jamais exactement les mêmes d'une personne à une autre et qui ne recoupent pas rigoureusement celles qui habitaient l'esprit de son auteur au moment où il écrivit le texte. Ces images sont mouvantes : chez chaque lecteur, elles évoluent avec le temps et sont susceptibles de se recomposer et de s'enrichir par la rencontre dans la pensée avec d'autres images nées d'autres lectures et de ses propres recherches. Ainsi, la distance qui sépare les deux plans visibles des mathématiques – celui des textes et celui des images mentales qui se dessinent dans la pensée – est à la fois ce qui rend les mathématiques très difficiles à expliquer et à apprendre, et ce qui permet leur fécondité.

J'espère que vous comprenez maintenant suffisamment ce que j'entends en mathématiques par « visible par les yeux » ou « visible par la pensée ». Un si long développement préparatoire était nécessaire pour commencer à évoquer « l'invisible en mathématiques ». En effet, puisque l'invisible se définit comme ce qui n'est susceptible d'être vu ni par les yeux ni par la pensée, il ne peut pas être enfermé dans des mots, ni saisi et représenté clairement par la pensée. Il ne peut qu'être évoqué et montré surtout négativement, en précisant ce qu'il n'est pas.

Il est facile de donner des exemples d'invisible dont l'existence est une évidence pour chacun : nous-mêmes en tant qu'une vie intérieure nous est donnée, et notre vie en tant que telle. Or les mathématiques sont une manifestation de la vie humaine, et c'est d'abord pour cela qu'elles reposent sur l'invisible.

Jusqu'à présent, j'ai évoqué d'une part les textes mathématiques qui constituent la mémoire collective de la tradition mathématique et qui nourrissent, chez les personnes, leur mémoire individuelle objective de mathématiciens. Et d'autre part les images mentales, qui sont les formes concrètes de compréhension, d'appropriation et de découverte, que l'entendement élabore.

Dans un texte mathématique, un auteur n'écrit jamais à la première personne. Il rédige dans un style impersonnel, au présent, comme si l'objet de son étude était entièrement détaché du temps et de la vie, vrai de toute éternité et pour toute éternité. Il est de tradition de recourir couramment à des noms de mathématiciens pour désigner des notions ou des résultats dont un auteur a besoin – et c'est bien sûr une façon de reconnaître sa dette et celle de la communauté des mathématiciens vis-à-vis de personnes particulières – mais, dans les textes, ces noms de mathématiciens attribués à des objets mathématiques ou à des théorèmes n'ont pas une fonction différente des noms communs : au contraire, ces noms forment un réservoir commode de mots immédiatement disponibles pour désigner les notions et les propriétés auxquelles il s'avère nécessaire de recourir.

Même les images mentales personnelles qui composent la connaissance intime et réelle qu'un mathématicien a de sa discipline ne sont pas habitées : ce sont des images dépourvues de tout visage humain et de toute association avec aucune personne vivante, même pas soi-même. Un mathématicien en pleine réflexion, c'est-à-dire concentré dans la contemplation et le processus intérieur de transformation des images mathématiques que sa pensée a forgées, ne pense plus à aucune âme vivante, ni aux circonstances et aux conditions de sa propre vie, ni à sa personne. Pour quelques minutes ou davantage, il s'est mis en congé et désapproprié de l'apparence et de la représentation de sa vie, il s'est oublié lui-même, il ne se voit plus.

Mais ce n'est certes pas parce qu'une personne a cessé de voir la représentation qu'elle a de soi qu'elle a cessé de vivre. Et ce d'autant moins que la vie est intérieure, impossible à détacher de soi et à mettre à distance, donc invisible par nature.

En fait, que l'on considère le plan des textes impersonnels, ou bien celui des images mentales que la pensée voit à partir des textes lus et qu'elle objective sous la forme de textes que la main fait surgir sous la plume – l'ensemble des mathématiques est le fruit de l'action de l'entendement mû par les volontés de personnes individuelles. Comme toute science, comme toute activité créatrice, comme toute activité humaine, les mathématiques sont le produit de la volonté de personnes vivantes faisant effort, c'est-à-dire d'un amour à la recherche de son objet.

Si un mathématicien introduit une nouvelle notion, c'est qu'il l'a perçue – avec plus ou moins de raison – comme pertinente en elle-même, susceptible de servir non seulement à lui mais à tous, jaillie non pas seulement pour le moment présent mais pour l'éternité. S'il prend la peine de coucher sur le papier un nouveau résultat et d'accomplir le patient travail d'assemblage de tous les arguments nécessaires, c'est qu'il estime que ce résultat attendait depuis toujours d'être dit, que lui-même en est seulement le serviteur et que ce résultat vient de plus loin que sa personnalité contingente de mathématicien.

Jamais pourtant la moindre notion mathématique, ni le moindre théorème, n'aurait été pressentie, recherchée confusément, arrachée peu à peu aux brumes de l'informulé et finalement objectivée sur le papier, sans l'exercice de la volonté humaine. Cette volonté, invisible en tant que telle, dont aucun texte mathématique ne parle jamais, et dont le mathématicien oublie jusqu'à l'existence dans le moment même où il l'exerce avec le plus de force.

Plus paradoxalement encore, les mathématiques sont le fruit d'une volonté exercée pour être finalement vaincue et dépassée. Vaincue par la résistance des objets et des « faits de pensée » contre lesquels elle se jette. Dépassée par leur beauté et leur mystère qu'elle perçoit sans les saisir dans la clarté de l'entendement.

Il me faut tenter de préciser pour vous la nature de ces « faits de pensée » constitutifs de la réalité mathématique et que l'entendement ne finit par reconnaître qu'après que la volonté s'est longuement heurtée contre eux dans l'obscurité, jusqu'à se rendre et les accepter tels qu'ils sont.

J'appelle « fait de pensée » toute affirmation mathématique, notion ou argumentation qui donne au mathématicien le sentiment de ne pas dépendre, en son fond, de l'histoire contingente des mathématiques. Bien sûr, tout texte mathématique emploie des notions et recourt à des résultats qui ont chacun leur histoire, et leur nom que des hommes ont choisi pour eux et qui varie d'une langue particulière à une autre ; cette histoire et ce nom auraient pu être différents. Mais le mathématicien peut éprouver le sentiment que, par delà les contingences, n'importe quel développement des mathématiques aurait nécessairement mené un jour ou l'autre à ces notions et à ces résultats, fût-ce sous d'autres noms et par d'autres voies. Il dit alors que ces notions et ces résultats sont « naturels », même s'ils font partie de théories extraordinairement sophistiquées qui ont demandé des siècles d'élaboration et d'approfondissement. Il les ressent comme des « faits de nature » alors qu'il ne s'agit pas de phénomènes de la nature physique qui s'imposeraient à ses sens, mais d'objects qui se présentent à sa pensée sous la seule forme d'images mentales, et à ses yeux dans des textes abscons parsemés de notations, de signes et, éventuellement, de quelques figures ou diagrammes.

La distinction entre ce qui, dans les mathématiques telles qu'elles existent, est contingent et ce qui échappe à la contingence – les « faits de pensée » –, n'est pas objectivable sur le papier ni susceptible d'être saisie clairement par l'entendement. C'est essentiellement une impression éprouvée par la personne du mathématicien sensible à la profondeur de l'être et à la beauté. Mais cette distinction est tellement essentielle pour lui qu'elle oriente toute sa recherche et commande son apprentissage des mathématiques déjà existantes : toute sa volonté est tendue vers la recherche de véritables « faits de pensée ». Autrement dit, toute sa volonté est tendue vers la recherche de ce qui ne dépend pas de la volonté. Tout son effort vise à atteindre ce qu'aucun effort ne peut faire plier. Toute son ardeur conquérante aspire à rencontrer une résistance invincible contre laquelle se briser.

Sous quelle forme concrète des « faits de pensée » sont-ils susceptibles de se manifester à l'esprit et de lui faire sentir la présence d'une réalité mathématique invisible, sous-jacente aux images mentales que brasse l'entendement et aux développements mathématiques objectivés dans l'écriture ? Je voudrais évoquer en quelques mots trois types de telles manifestations.

Le premier type n'est pas seulement une forme particulière de manifestation de certains « faits de pensée » mathématiques, mais aussi une condition a priori de la manifestation de tels faits : il comprend les règles élémentaires de la logique, que tout développement mathématique doit, par principe, respecter rigoureusement. L'obligation que le mathématicien s'est imposée à lui-même, de n'accepter comme raisonnements valides que des chaînes de syllogismes élémentaires et explicites mis bout à bout, est une discipline extrêmement contraignante. Mais elle est la première condition pour empêcher l'entendement de divaguer, et pour rendre l'esprit davantage susceptible de s'ouvrir à la vérité mathématique. L'explicitation objectivée des syllogismes autorisés, d'une liste de symboles sur lesquels ils portent et de leurs règles d'application, constitue ce que l'on appelle une axiomatique. La logique, qui fait partie des mathématiques, enseigne que le choix d'une axiomatique comporte une part d'arbitraire et que son fondement ne peut être ni complètement explicité ni complètement compris ; autrement dit, le fondement ultime des mathématiques est invisible. Cela n'empêche pas le mathématicien d'être persuadé que les règles de logique les plus élémentaires, qu'il emploie sans plus y penser tant elles lui paraissent naturelles, sont vraies et point arbitraires ; autrement dit, elles sont bien pour lui des « faits de pensée », reconnus comme tels par la sensibilité de son esprit vivant fait pour la vérité, et non pas grâce à un développement formel objectivé sur le papier.

Un second lieu privilégié de manifestation brute de « faits de pensée » est le calcul et, plus généralement, l'écriture quand elle a la possibilité de se laisser porter par une théorie comme par un fleuve au long cours. Tout mathématicien sait d'expérience que son imagination est pauvre et que, laissée à elle-même, elle tourne en rond dans le cercle étroit des images que l'entendement a déjà assimilées. Il lui faut trouver des moyens d'échapper à l'attraction fatale de l'imagination, « superbe puissance ennemie de la raison », qui maintient dans les ornières des territoires trop familiers. Une possibilité de sortie hors du cercle fermé d'une imagination trop habituée est parfois offerte par un calcul ; il faut à la fois que celui-ci soit faisable et que son résultat ne soit pas prévisible à l'avance. Il se peut alors que, au terme du calcul ou parfois dans un accident imprévu de son cours, il se présente soudain à l'entendement quelque chose de complètement inattendu susceptible de le libérer. Alors justement, l'esprit éprouve le sentiment d'avoir été mis au contact d'un « fait de nature », d'avoir senti un instant passer sur lui le vent de l'aile de la vérité. C'est l'une des raisons pour lesquelles les mathématiciens consacrent une partie importante de leurs travaux à élaborer des théories qui rendent possibles de nouveaux calculs. Plus rares et privilégiés sont les mathématiciens chez qui le développement d'une ligne de pensée poursuivie dans l'écriture de dizaines ou de centaines de pages peut emmener aussi loin de soi qu'un calcul, jusqu'à plonger profondément dans des épaisseurs encore inexplorées de la réalité mathématique.

Enfin, un troisième type de manifestation de « faits de pensée » est l'apparition d'objets mathématiques nouveaux dont la puissance de fécondité est ressentie comme inépuisable : citons par exemple la fonction « zéta » de Riemann, la notion d'intégrale d'une fonction ou encore, au niveau le plus élémentaire, les quatre opérations de l'arithmétique ! L'esprit peut en effet ressentir certains objets mathématiques comme des sortes de « noeuds de vérité », sans se laisser arrêter par le sentiment de bizarrerie qu'ils provoquent, et en se projetant toujours au-delà de la liste, d'abord fort courte et qui restera à jamais incomplète et insuffisante, des raisons objectives de leur accorder de l'importance. Il existe des objets mathématiques qui, à partir du jour où ils sont définis et nommés pour la première fois, aimantent les esprits des mathématiciens et font vibrer leur sens esthétique et affectif. Au fil des générations de mathématiciens, de tels objets peuvent justifier au-delà de toute espérance raisonnable l'intérêt mystérieux qu'ils ont suscité, par la germination autour d'eux de faisceaux de notions apparentées et de résultats toujours plus profonds ; il n'en restera pas moins que les raisons de la fécondité qu'ils permettent ne seront jamais complètement objectivées et qu'elles échapperont toujours à l'entendement. Plus cette puissance de fécondité est illustrée par une liste objective de textes riches et de résultats fascinants portant sur de tels objets, plus leur mystère, loin de se dissoudre, est rendu sensible. Ainsi, les millions de pages de mathématiques déjà écrites qui utilisent les quatre opérations, ont creusé toujours davantage le mystère de la richesse de ces opérations apparemment si simples.

En définitive, ce qui, en mathématiques, est le plus lourdement chargé d'invisible perceptible par l'esprit, ce sont des faits bruts. Des faits qui s'imposent à la mémoire, à l'entendement, et surtout au sens esthétique et affectif des mathématiciens : les règles les plus élémentaires de la logique, certains calculs et certaines lignes de raisonnement qui n'auront jamais fini de trouver de nouvelles interprétations et de nouveaux développements, certains objets particuliers autour desquels se cristallisent des réseaux toujours plus fins de connaissances.