Le thème de la dualité dans « Récoltes et Semailles »

(Citations rassemblées, ordonnées et présentées par Laurent Lafforgue)

Le thème mathématique de la dualité est l'un de ceux sur lesquels Grothendieck revient le plus dans « Récoltes et Semailles ». Il le cite dans la liste de ses douze « maîtres-thèmes » (p. 42 dans l'édition publiée de 2021 chez Gallimard), précisant d'emblée que ce thème rassemble la « dualité continue » et la « dualité discrète » et qu'il comprend les « catégories dérivées » et les « six opérations » ou « six variances » (p. 186).

Le formalisme des six opérations :

Il explique en effet (p. 417) que « parmi les notions et idées mathématiques qu'il a tirées au jour et qui lui semblent avoir la plus grande portée » figure « l'idée de catégorie dérivée et de son utilisation pour un formalisme passe-partout dit formalisme des six opérations ».

Ce formalisme vaut « pour la cohomologie des types d'espaces les plus importants qui se sont introduits jusqu'à présent en géométrie : espaces algébriques (tels que schémas, multiplicités schématiques, etc.), espaces analytiques (tant analytiques complexes que rigides-analytiques et assimilés), espaces topologiques (en attendant, bien sûr, le contexte des « espaces modérés » en tous genres, et sûrement bien d'autres encore, tel celui de la catégorie des petites catégories, servant de modèles homotopiques ...). »

Les six opérations en question sont six foncteurs qui relient les catégories dérivées de complexes de Modules sur des « Anneaux de coefficients » $\mathcal{A}$, c'est-à-dire de complexes de faisceaux de modules linéaires à coefficients dans des faisceaux d'anneaux de structure $\mathcal{A}$, sur des objets géométriques X munis de topologies au sens ordinaire ou, plus généralement, de topologies de Grothendieck.

Tout d'abord, si $\mathcal{A}$ est un Anneau commutatif, une telle catégorie est munie du bifoncteur de produit tensoriel dérivé $\overset{L}{\otimes}$ et de son adjoint à droite l'exponentiation $R\mathcal{H}om$.

Puis, si deux tels objets géométriques X et Y munis d'Anneaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont reliés entre eux par un morphisme géométrique $f : X \to Y$ respectant les topologies et relevé en un morphisme de faisceaux d'anneaux $f^{-1}(\mathcal{B}) \to \mathcal{A}$, les deux catégories dérivées associées de complexes de faisceaux de modules sur $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ sont reliées par les foncteurs dérivés d'image réciproque Lf^* et d'image directe Rf_* adjoint à droite du précédent.

Enfin, sous des hypothèses convenables sur f, elles sont encore reliées par un foncteur dit d'image directe à supports compacts $Rf_!$ et son adjoint à droite l'image réciproque ≪ inhabituelle ≫ $Rf^!$.

La formation des foncteurs $Rf_!$ et $Rf^!$ doit être fonctorielle en f, tout comme celle des foncteurs Lf^* et Rf_*. De plus, le foncteur $Rf_!$ doit coïncider avec le foncteur Rf_* lorsque f est un morphisme ≪ propre ≫, et le foncteur $Rf^!$ doit coïncider avec le foncteur Lf^* lorsque f est une ≪ immersion ouverte ≫ ou plus généralement un morphisme ≪ étale ≫. Ces propriétés suffisent à déterminer la paire de foncteurs adjoints $Rf_!$ et $Rf^!$ lorsque f est un morphisme ≪ compactifiable ≫.

Dualité globale, dualité locale, complexes dualisants, coefficients constructibles et bidualité :

Ce formalisme doit être considéré comme ≪ une sorte de quintessence d'un formalisme de dualité globale en cohomologie ≫ (p. 428). Dans sa forme la plus efficace, il doit être ≪ débarrassé de toutes hypothèses superflues ≫, notamment ≪ de lissité pour les espaces et applications envisagées, et de propreté pour les morphismes ≫.

L'énoncé central de la ≪ dualité globale ≫ consiste en la même formule dans tous les contextes :

Pour tout morphisme $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ reliant deux objets géométriques X et Y munis d'Anneaux de coefficients $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et pour tous complexes de $\mathcal{A}$-Modules $\mathcal{M}$ sur X et de $\mathcal{B}$-Modules $\mathcal{N}$ sur Y, l'image directe $Rf_*(R\mathcal{H}om(\mathcal{M}, Rf^!\mathcal{N}))$ est canoniquement isomorphe à $R\mathcal{H}om(Rf_!\mathcal{M}, \mathcal{N})$ dans la catégorie dérivée des $\mathcal{B}$-Modules sur Y.

Autrement dit, les foncteurs d'exponentiation $R\mathcal{H}om(\bullet, Rf^!\mathcal{N})$ sur X et $R\mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{N})$ sur Y doivent transformer le foncteur $Rf_!$ en le foncteur Rf_*, ce qui s'exprime par la commutativité (à isomorphisme canonique près) du carré de foncteurs reliant les catégories dérivées $D(\mathcal{M}od_{\mathcal{A}})$ et $D(\mathcal{M}od_{\mathcal{B}})$ de complexes de Modules sur $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$:

$$\begin{tikzcd}
D(\mathcal{M}od_{\mathcal{A}})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "R\mathcal{H}om(\bullet, Rf^!\mathcal{N})"] \arrow[d, "Rf_!"'] & D(\mathcal{M}od_{\mathcal{A}}) \arrow[d, "Rf_*"] \\
D(\mathcal{M}od_{\mathcal{B}})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "R\mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{N})"] & D(\mathcal{M}od_{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}$$

Lorsque Y est réduit à un point et que X est un objet géométrique lisse de dimension d, le foncteur $Rf^!$ se calcule en termes du foncteur Lf^* et de la dimension d, si bien que la formule de ≪ dualité globale ≫ contient comme cas particuliers la dualité de Serre dans le cas cohérent ≪ continu ≫ et la dualité de Poincaré dans le cas de ≪ coefficients discrets ≫.

Ce formalisme comprend aussi un ≪ formalisme de dualité locale, dans lequel on distingue parmi les coefficients admis les objets ou complexes dits dualisants ≫. Ceux-ci doivent être respectés par les foncteurs d'image réciproque inhabituelle – au sens que les foncteurs $Rf^!$ doivent transformer les complexes dualisants $\mathcal{L}$ en complexes dualisants – et donner lieu à un ≪ théorème de bidualité ≫ (en termes des foncteurs dérivés $R\mathcal{H}om(\ ,\mathcal{L})$) ≪ pour des coefficients satisfaisant des conditions de finitude convenables sur les degrés, et de cohérence ou de constructibilité sur les objets de cohomologie locale ≫ (p. 429).

La notion de constructibilité fait donc partie du formalisme de dualité de Grothendieck. Elle doit être stable par les six opérations, comprendre les Anneaux de coefficients dont sont munis les objets géométriques, et vérifier relativement aux ≪ complexes dualisants ≫ un ≪ thèorème de bidualité ≫ ou ≪ théorème de dualité locale ≫ (p. 584) qui généralise la propriété qu'un espace vectoriel de dimension finie s'identifie au dual de son dual :

Pour tout ≪ complexe dualisant ≫ $\mathcal{L}$ et tout complexe constructible $\mathcal{M}$, le morphisme canonique

$$\mathcal{M} \longrightarrow R\mathcal{H}om(R\mathcal{H}om(\mathcal{M},\mathcal{L}),\mathcal{L})$$

doit être un isomorphisme de la catégorie dérivée.

Grothendieck commente (p. 1244-1245) :

≪ Le théorème de bidualité ou ≪ théorème de dualité locale ≫ (les deux noms sont ceux que je lui avais donnés), tant dans le contexte cohérent que dans le contexte ≪ discret ≫ (étale, notamment), est dans la nature d'un théorème de dualité de Poincaré ≪ local ≫, valable pour des ≪ variétés ≫ (algébriques ou analytiques, ou des espaces ≪ modérés ≫, etc.) pouvant avoir des singularités quelconques.

C'est un théorème d'un type entièrement nouveau, dans l'arsenal des ≪ faits de base ≫ dans la cohomologie des espaces en tous genres, et c'est un complément important et profond du formalisme de dualité dit ≪ des six opérations ≫ que j'ai développé, pour exprimer avec un maximum de souplesse et de généralité tous les phénomènes de type ≪ dualité cohomologique ≫ (genre Poincaré).

Il fait partie, avec l'introduction du foncteur $Rf^!$ (l'image inverse ≪ inhabituelle ≫), des principales idées novatrices que j'ai introduites, dans le formalisme de dualité des variétés et espaces ≪ en tout genre ≫ ; l'un et l'autre forment en quelque sorte l'≪ âme ≫ du yoga d'ensemble des ≪ six opérations ≫. ≫

Grothendieck se remémore (p. 430) qu'il avait ≪ dégagé pour la première fois les diverses notions de constructibilité pour des coefficients discrets (dans les contextes analytique-complexe, analytique-réel, linéaire par morceaux) vers la fin des années 1950 ≫, puis les avait ≪ reprises quelques années plus tard dans le contexte de la cohomologie étale ≫. Il avait ≪ alors posé la question de la stabilité de cette notion par images directes supérieures pour un morphisme propre d'espaces analytiques réels ou complexes ≫.

Quant aux ≪ opérations de nature locale ≫ (telles que les foncteurs dérivés $R\mathcal{H}om$), ≪ il était clair que l'argument qui établissait la stabilité des coefficients constructibles dans le cadre des schémas excellents de caractéristique nulle (en utilisant la résolution des singularités de Hironaka) marchait tel quel dans le cas analytique complexe, et de même pour le théorème de bidualité ≫.

≪ Dans le cadre linéaire par morceaux, les stabilités naturelles et le théorème de bidualité sont des exercices faciles ≫ que, écrit-il, il avait ≪ eu plaisir à faire à titre de vérification de l'ubiquité du formalisme de dualité, au moment du démarrage de la cohomologie étale (dont une surprise principale avait justement été la découverte de cette ubiquité) ≫.

Pour ce qui est du cas des coefficients continus, il précise (p. 441) avoir ≪ développé vers la fin des années 1950 la théorie de dualité des faisceaux cohérents (i.e. le formalisme des six variances dans le cadre cohérent) ≫.

Travaux de fondements sur les catégories dérivées :

Toutefois, la théorie de dualité ≪ ne prenait tout son sens que modulo un travail de fondements sur la notion de catégorie dérivée, qui a été fait par Verdier ultérieurement ≫.

Avant ce travail de fondements, Grothendieck s'était ≪ borné à travailler avec les catégories dérivées de façon heuristique, avec une définition provisoire de ces catégories (qui s'est avérée par la suite être la bonne), et avec une intuition également provisoire de leur structure interne essentielle (qui s'est révélée techniquement fausse dans le contexte prévu, le ≪ mapping cone ≫ ne dépendant pas fonctoriellement de la flèche dans une catégorie dérivée qui est censée le définir, et qui le définit seulement à isomorphisme non unique près) ≫.

Il se souvient (p. 589) : ≪ Vers l'année 1960 ou 1961 je propose à Verdier, comme travail de thèse possible, le développement de nouveaux fondements de l'algèbre homologique, basé sur le formalisme des catégories dérivées que j'avais dégagé et utilisé au cours des années précédentes pour les besoins d'un formalisme de dualité cohérente dans le contexte des schémas. ≫

Il désigne dans le texte d'une vingtaine de pages de la thèse de Verdier (soutenue en 1967) ≪ la meilleure introduction au langage des catégories dérivées écrite à ce jour, situant ce langage dans le contexte de ses utilisations essentielles (dont plusieurs sont dues à Verdier lui-même) ≫.

Cependant, ce texte ≪ était seulement l'introduction à un travail rédigé ultérieurement ≫ et qui ≪ présente des fondements systématiques de l'algèbre homologique selon le point de vue des catégories dérivées ≫ (p. 442). Ajoutons que ce travail sera finalement publié comme volume Astérisque (numéro 239) en 1996, après la disparition tragique de Verdier, grâce à Georges Maltsiniotis.

Un texte intermédiaire de cinquante pages intitulé ≪ Catégories dérivées, état 0 ≫ avait cependant été publié en 1976 dans le volume SGA 4 1/2 dont Grothendieck vient ≪ tantôt seulement de prendre connaissance ≫ (p. 498) au moment où il écrit ≪ Récoltes et Semailles ≫.

Grothendieck commente encore (p. 667) que la notion de ≪ catégorie triangulée ≫ ne suffit pas à rendre compte de la structure des catégories dérivées, tout comme la thèse de Giraud écrite plus tard pour rendre compte de ≪ l'aspect non commutatif ≫ est seulement une amorce : ≪ Dès la seconde moitié des années 1960, l'insuffisance de ces deux amorces était bien évidente : tant par l'insuffisance de la notion de ≪ catégorie triangulée ≫ (dégagée par Verdier) pour rendre compte de la richesse de structure associée à une catégorie dérivée (notion appelée à être remplacée par la notion considérablement plus riche de dérivateur), que par le besoin de développer un langage géométrique pour une cohomologie non commutative en dimensions quelconques, en termes de n-champs et de ∞-champs sur un topos. On sentait (ou je sentais) le besoin d'une synthèse de ces deux approches, qui servirait de fondement conceptuel commun à l'algèbre homologique et à l'algèbre homotopique. Un tel travail se plaçait également en continuité directe avec le travail de thèse d'Illusie, dans lequel l'un et l'autre aspect sont représentés. ≫

Il annonce (p. 443) que ≪ l'idée-clef de ≪ dérivateur ≫ ou ≪ machine à fabriquer des catégories dérivées ≫, qui semble bien être l'objet plus riche commun, sous-jacent aux catégories triangulées qu'on a développées jusqu'à présent, [] sera finalement développée tant soit peu dans un cadre non additif, près de vingt ans après, dans un chapitre du Volume 2 de la ≪ Poursuite des champs ≫. ≫

Finalement, Grothendieck écrivit dans la période suivant ≪ Récoltes et Semailles ≫ plusieurs milliers de pages de notes sur le thème des dérivateurs.

Un formalisme complet de dualité :

Grothendieck précise que, quand il ≪ parle du formalisme des six variances ≫, il ≪ sous-entend ce formalisme complet de dualité, tant dans ses aspects locaux que globaux ≫ (p. 429).

Ce formalisme est complet au sens que, écrit-il (p. 573), ≪ la théorie de dualité cohérente (dans le cadre schématique tout au moins), tout comme celle de la dualité étale (et sa variante pour la cohomologie discrète des espaces localement compacts, développée par Verdier sur le modèle étale), apparaissent comme des théories pour l'essentiel achevées, dans la nature donc d'outils parfaitement au point et prêts à l'usage, et non d'une substance tant soit peu inconnue qu'il s'agirait de pénétrer et d'assimiler ≫.

Le développement du formalisme de dualité dans le cas cohérent :

Grothendieck précise comment ses réflexions sur la dualité se sont développées progressivement d'abord dans le cas cohérent (p. 1347) :

≪ Dans la seconde moitié des années 1950, j'avais développé dans le contexte des schémas un formalisme de ≪ dualité cohérente ≫. Ces réflexions, motivées par le désir de comprendre le sens et la portée exacte du théorème de dualité de Serre en géométrie analytique et surtout en géométrie algébrique, avaient été poursuivies dans une solitude à peu près complète. ≫

Il mentionne au passage que, en fait, ses ≪ premières réflexions de dualité se plaçaient dans le cadre des espaces analytiques et sont antérieures à celles de Serre ≫ ; elles utilisaient des techniques de dualité pour les espaces vectoriels topologiques, et concernaient les espaces de cohomologie du faisceau de structure et de son dual sur les variétés de Stein.

Puis, poursuit-il (p. 1348), ces réflexions l'ont ≪ amené à dégager progressivement la notion de catégorie dérivée, dont les objets se présentaient comme ≪ les coefficients ≫ naturels dans le formalisme homologique et cohomologique des espaces et variétés en tous genres, s'insérant dans un premier embryon d'un formalisme des ≪ six opérations ≫ sur les espaces annelés (en attendant les topos annelés) ≫.

Il note que quatre de ces opérations (à savoir les opérations internes de produit tensoriel $\overset{L}{\otimes}$ et d'exponentiation $R\mathcal{H}om$, et externes d'images inverses Lf^* et directes Rf_* ≪ à la Leray ≫, formant deux couples de foncteurs ou bifoncteurs adjoints) lui étaient déjà ≪ plus ou moins familières ≫ depuis son ≪ travail de 1955 ≪ Sur quelques points d'algèbre homologique ≫, au langage des catégories dérivées près ≫.

Dans le cas où f est un morphisme ≪ immersion ≫ $i : X \to Y$, il s'y ajoutait encore ≪ le couple de foncteurs adjoints $Ri_!$, $Ri^!$, incarnant respectivement les opérations de ≪ prolongement par zéro ≫ et ≪ cohomologie locale à support dans X ≫.

Il explique (p. 1348-1351) :

≪ Le fil conducteur dans mes réflexions était d'arriver à un théorème de dualité (globale, à un moment où il n'était pas question encore de version locale . . .), généralisant celui prouvé par Serre pour un faisceau cohérent localement libre sur une variété projective lisse sur un corps. Il s'agissait de donner une formulation qui s'appliquerait à un faisceau cohérent quelconque (ou complexe de tels), voire même un faisceau quasi-cohérent, sans hypothèse de lissité ni de projectivité sur X (en gardant seulement la propreté, qui paraissait alors essentielle).

De plus, en analogie avec mes réflexions sur le théorème de Riemann-Roch, je sentais que le bon énoncé devait concerner, non une variété sur un corps, mais un morphisme propre $f : X \to Y$ de schémas, par ailleurs quelconques.

C'est par approximations successives, au cours de plusieurs années de travail, que le théorème de dualité globale se décante progressivement de ses hypothèses superflues, en même temps que la notion de catégorie dérivée elle aussi sort des limbes du pressenti pour prendre forme concrète, et donner au formalisme et aux énoncés un sens intrinsèque, à défaut duquel je me serais senti bien incapable de travailler !

C'est tout d'abord pour arriver à dégager un énoncé de dualité globale qui me satisfasse pleinement, que j'introduis le formalisme des complexes dualisants et dégage le théorème de bidualité, et que je découvre (sous des hypothèses noethériennes convenables) l'existence d'un complexe dualisant injectif, essentiellement canonique, que j'appelle le ≪ complexe résiduel ≫, et une théorie de variance pour celui-ci.

Une première formulation du théorème de dualité globale, qui à un moment me semblait être ≪ la bonne ≫, était que le foncteur Rf_* commutait aux foncteurs dualisants sur X et Y (pour deux complexes dualisants qui ≪ se correspondent ≫).

C'est par la suite seulement que je découvre que la théorie de variance pour les seuls complexes dualisants (via les complexes résiduels) se généralise par un foncteur de nature entièrement nouvelle, le foncteur $Rf^!$ ou ≪ image inverse inhabituelle ≫, de nature locale sur X. Dès lors, apparaît aussi la formulation définitive du théorème de dualité pour le morphisme propre f : ce nouveau foncteur est adjoint à droite de Rf_*, s'insérant dans une suite de trois foncteurs adjoints Lf^*, Rf_*, $Rf^!$.

Pour avoir un formalisme entièrement achevé, il manquait seulement la description d'un foncteur $Rf_!$, ≪ image directe à supports propres ≫, pour un morphisme (séparé) de type fini quelconque, généralisant le foncteur déjà connu quand f est une immersion, se réduisant à Rf_* pour f propre, et formant avec $Rf^!$ un couple de foncteurs adjoints $Rf_!$, $Rf^!$. Je ne me rappelle pas m'être affligé dans les années 1950 de cette imperfection d'un formalisme dont la portée générale, au-delà de la dualité cohérente schématique ou analytique, m'échappait encore.

Cette lacune m'apparaît pleinement en 1963 seulement, quand je découvre que, dans le contexte de la cohomologie étale (à coefficients ≪ discrets ≫) qui venait de naître, existe un formalisme en tous points analogue au formalisme cohérent, avec en plus, justement, un foncteur $Rf_!$ (d'image directe à supports propres) défini pour tout morphisme séparé de type fini. ≫

Sur le sujet du foncteur $Rf_!$ qui faisait défaut dans le cas cohérent, Grothendieck précise (p. 1350) :

≪ Bien entendu, je m'étais rendu compte que déjà dans le cas d'une immersion ouverte $f : X \to Y$, où le foncteur $Rf^!$ coïncide donc avec le foncteur Lf^* de ≪ restriction à X ≫, celui-ci n'admettait pas (dans le contexte des faisceaux quasi-cohérents) d'adjoint à gauche. L'adjoint à gauche habituel $Rf_!$ (≪ prolongement par 0 hors de X ≫) ne conserve pas la quasi-cohérence. D'autre part, j'avais vérifié également qu'en-dehors d'hypothèses de quasi-cohérence et même pour un morphisme propre de base un point, il n'y a pas de ≪ théorème de dualité ≫. Ainsi l'impossibilité de définir un $Rf_!$ sous des hypothèses générales me semblait acquise et dans la nature des choses.

C'est Deligne qui s'est aperçu en 1965 ou 1966 (à peine débarqué !) que l'on pouvait donner un sens à $Rf_!$ et récupérer le théorème de dualité cohérente pour un morphisme séparé de type fini non propre, à condition de travailler avec des coefficients qui sont des (complexes de) pro-faisceaux quasi-cohérents. ≫

Ce travail de Deligne que cite Grothendieck n'a jamais été publié.

Une nouvelle formulation, sans doute équivalente, a été proposée et construite en toute généralité par Clausen et Scholze dans le cadre de leur théorie des ≪ espaces condensés ≫ (voir le dernier chapitre ≪ Lecture XI ≫ du cours de Scholze ≪ Lectures on Condensed Mathematics ≫).

Grothendieck mentionne enfin d'autres développements réalisés autour du thème de la dualité cohérente (p. 1351) :

≪ Dans la foulée de mes réflexions de dualité cohérente des années 1950, j'avais été amené alors à introduire et à développer tant soit peu la version purement algébrique de la cohomologie de Hodge et de celle de De Rham, et notamment le formalisme des classes de cohomologie associées à un cycle algébrique (supposé lisse dans un premier temps), et une théorie des classes de Chern, sur le modèle de celle que j'avais développée en théorie de Chow. ≫

La publication pas tout à fait complète de ses résultats en dualité cohérente :

Les travaux de Grothendieck en dualité cohérente ont été finalement publiés dans le séminaire de Robin Hartshorne ≪ Residues and Duality ≫ (LNM 20, 1966).

Il commente (p. 1351) : ≪ Le séminaire en question expose l'essentiel de mes idées sur le formalisme de dualité cohérente, centrées sur le formalisme des six opérations, la bidualité, et une théorie des ≪ complexes résiduels ≫ (lesquels sont des représentants injectifs canoniques des complexes dualisants.). Ces idées ont été reprises dans le cadre analytique par Verdier et surtout par Ramis et Ruget.

Le séminaire Hartshorne ne contient pas, par contre, divers développements plus fins, intimement liés à ce formalisme : une théorie des résidus (pour des schémas de type fini et plats sur une base quelconque), et une théorie cohomologique de la différente, lesquels n'ont jamais été publiés (à ma connaissance). ≫

Sur ce sujet du lien entre formes différentielles, résidus et dualité cohérente, il précise en effet (p. 573) :

≪ Il y a pourtant un certain nombre de résultats fins de dualité cohérente, notamment sur la structure des modules de différentielles dualisantes, leur relation aux modules de différentielles naïves, et les applications trace et résidu dans le cas plat non lisse, que j'avais développées vers la fin des années 1950 et qui n'ont jamais été publiées à ma connaissance. ≫

Il mentionne (p. 368) qu'une ≪ rédaction un peu longue faite pour Bourbaki (sur le formalisme différentiel des variétés) ≫ lui avait été ≪ utile des années plus tard ≫ quand il avait développé ≪ le formalisme des résidus du point de vue de la dualité cohérente ≫.

Cette ≪ rédaction un peu longue ≫ n'a pas été publiée non plus.

Le développement du formalisme de dualité dans le cas étale puis ℓ-adique :

Grothendieck précise la chronologie de la naissance et du développement de la cohomologie étale (p. 1233) :

≪ Le principe de la définition de la cohomologie étale remonte à 1958, et j'ai prouvé les ≪ résultats-clefs ≫ nécessaires et suffisants pour le formalisme complet (y compris les théorèmes du type ≪ Lefschetz faible ≫ et les notions de profondeur cohomologique dans le contexte étale) en février et mars 1963. ≫

Il se rappelle avoir obtenu les principaux résultats en quelques jours du fait qu'il pouvait se fonder sur le travail d'exploration déjà accompli dans le cas cohérent (p. 1350) :

≪ C'est d'ailleurs en me guidant pas à pas sur le travail que j'avais fait dans le cas cohérent des années auparavant (sans intéresser personne d'autre que moi), que j'arrive alors (en l'espace d'une semaine ou deux, à tout casser), à partir des deux théorèmes-clefs de changement de base, à établir le formalisme complet des ≪ six opérations ≫. C'est là un formalisme de dualité incomparablement plus perfectionné et plus puissant que celui dont on disposait précédemment dans le contexte transcendant, pour les seules variétés topologiques (et systèmes locaux sur icelles), et plus satisfaisant même que le formalisme auquel j'étais parvenu en dualité cohérente. ≫

La dualité étale est alors plus complète que la dualité cohérente dans la mesure où elle comprend des foncteurs $Rf_!$ adjoints des $Rf^!$ toujours bien définis.

Il précise (p. 1269-70) ce qu'il avait démontré dès ces années :

« Les « six foncteurs » et les formules essentielles les concernant, dont la plus cruciale est la « formule de dualité » pour un morphisme séparé de type fini (qu'on peut considérer comme la version la plus générale imaginable à ce jour, du classique théorème de dualité de Poincaré), ont été établis par moi, sans avoir à aucun moment à imposer des hypothèses de finitude aux coefficients. »

Il nuance cependant (en note p. 573) que la théorie de la dualité étale n'est pas encore tout à fait complète « tant que les conjectures de pureté et le théorème de bidualité ne seront prouvés en toute généralité. »

Les « conjectures (ou théorèmes) de pureté » consistent en une formule qui calcule, dans le cas d'une immersion localement fermée f d'un objet géométrique X régulier (c'est-à-dire sans singularités) dans un objet géométrique régulier Y, le transformé par le foncteur $Rf^!$ de l'Anneau de coefficients de Y, en termes de l'Anneau de coefficients de X et de la codimension de l'immersion. Cette formule complète celle qui calcule, dans le cas d'un morphisme lisse f de dimension d d'un objet géométrique X sur un objet géométrique Y, le foncteur $Rf^!$, en termes du foncteur Lf^* et de la dimension relative d.

Il précise (p. 1232) que la « conjecture de pureté cohomologique » (version étale) avait été prouvée par lui « quand X et Y sont tous deux lisses sur un schéma de base S régulier », et par Artin « en utilisant à fond la résolution des singularités, dans le cas où X est excellent de caractéristique nulle ».

D'autre part, le « théorème de finitude pour les $R^i f_*$, pour f morphisme séparé de type fini de schémas noethériens (excellents), quand f n'est pas supposé propre » et le « théorème de bidualité sur un schéma régulier excellent » avaient été prouvés par lui « moyennant des hypothèses de résolution des singularités et de pureté cohomologique » qui « ne s'appliquent pas aux variétés algébriques en caractéristique $p > 0$ ». Cela n'empêchait pas que, « dans le cadre des coefficients de torsion (comme opposés aux coefficients ℓ-adiques), le formalisme de dualité des six opérations (incluant donc la dualité de Poincaré) avait été établi » par lui « en 1963 sans conditions de finitude ».

Il explique que l'on a besoin du théorème de finitude pour les $R^i f_*$ en cohomologie étale « pour définir Rf_* (et deux autres parmi les « six opérations ») dans le cadre ℓ-adique constructible ».

Il ajoute (p. 1232-1233) :

« La situation a été améliorée notablement, par l'élégante démonstration par Deligne (en 1973 ?) du théorème de finitude, pour un morphisme de schémas de type fini sur un schéma S régulier de dimension au plus 1. Ce cas couvre la plupart des applications (schémas algébriques sur un corps, schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$ notamment). Dans la même situation d'un schéma X de type fini sur un schéma régulier de dimension au plus 1, et par des arguments similaires, Deligne parvient également à prouver le théorème de bidualité. »

On peut préciser que les démonstrations de Grothendieck fondées sur la résolution des singularités ont finalement pu être appliquées de manière inconditionnelle grâce au théorème de De Jong sur les « altérations » (publié en 1996) : ce théorème montre en effet l'existence de résolutions des singularités (en toutes caractéristiques, y compris mixtes) à condition de s'autoriser à remplacer les ouverts non-singuliers par des revêtements finis étales. C'est suffisant pour toutes les applications à la cohomologie étale.

La découverte de l'ubiquité du formalisme de dualité, et sa portée considérable :

Particulièrement importante pour Grothendieck est la découverte de ≪ l'ubiquité ≫ du ≪ formalisme de dualité ≫ progressivement dégagé par ≪ une réflexion solitaire, obstinée et exigeante, qui s'est poursuivie entre les années 1956 et 1963 ≫ (p. 417-418).

Il écrit (p. 429) : ≪ Un premier pas vers une compréhension approfondie de la dualité en cohomologie a été la découverte progressive du formalisme des six variances dans un premier cas important, celui des schémas noethériens et des complexes de modules à cohomologie cohérente. ≫ C'est justement l'objet des ≪ pré-notes ≫ du présent volume.

Il ajoute : ≪ Un deuxième pas a été la découverte, dans le contexte de la cohomologie étale des schémas, que ce formalisme s'appliquait également pour des coefficients discrets. Ces deux cas extrêmes étaient suffisants pour fonder la conviction de l'ubiquité de ce formalisme dans toutes les situations géométriques donnant lieu à une dualité de type Poincaré. ≫

L'ubiquité de sa formalisation de la dualité lui paraît ≪ un fait d'une portée considérable ≫, rendant impératif ≪ ce sentiment d'une unité profonde entre dualité de Poincaré et dualité de Serre ≫, et faisant du formalisme des six variances ≪ une des structures fondamentales en algèbre homologique pour une compréhension des phénomènes de dualité cohomologique tous azimuts ≫.

C'est à ses yeux l'une de ses plus importantes contributions aux mathématiques (p. 1356-57) :

≪ Une des découvertes les plus importantes que j'aie apportées aux mathématiques, et qui reste pratiquement ignorée de tous, a été celle de l'ubiquité du formalisme de dualité que j'avais commencé à développer dans les années 1950 : le ≪ formalisme des six variances et de bidualité ≫ s'applique à la fois aux coefficients ≪ continus ≫ envisagés initialement (théorie ≪ cohérente ≫), et aux coefficients ≪ discrets ≫. Cette ubiquité est apparue, comme une surprise à peine croyable, au printemps 1963 – c'est grâce à elle, et à rien d'autre, que j'ai pu développer un formalisme de dualité étale et parvenir à ce que j'appelle la ≪ maîtrise ≫ de la cohomologie étale. ≫

Pour Grothendieck, plus remarquable encore que l'ubiquité du formalisme de dualité par rapport à la multiplicité des contextes topologiques ou géométriques, est son ubiquité par rapport à la diversité des coefficients.

Il commente ainsi (p. 1474) :

≪ Cette idée des ≪ types de coefficients ≫ divers, dont chacun se présentait à moi comme une incarnation particulière du formalisme des six opérations (et de bidualité), cernant de plus ou moins près le ≪ type de coefficients ≫ le plus fin de tous, le type ≪ absolu ≫ ou ≪ universel ≫, ou ≪ motif ≫ – cette idée a été peut-être la principale idée-force qui m'a guidé tout au long des années 1960, et surtout à partir de 1963, dans le développement de ma vision cohomologique des variétés algébriques et autres. ≫

Pour ce qui est du développement systématique de cette théorie, il précise (p. 1236) :

≪ Le langage des topos, et le formalisme de la cohomologie étale, se trouvent développés dans les deux séminaires consécutifs et inséparables SGA 4 (en 1963/64) et SGA 5 (en 1965/66).

Le premier est fait en collaboration avec d'autres, et développe, en plus du langage des topos, les résultats-clefs de cohomologie étale, y compris les énoncés de démarrage en dualité (style six opérations).

Le deuxième, où je faisais pratiquement cavalier seul, développe de façon beaucoup plus détaillée un formalisme complet de dualité, y compris les formules de points fixes conduisant à la théorie cohomologique des fonctions L (qui constitue une part importante de l'ensemble des conjectures de Weil). ≫

La question de l'existence d'une théorie commune aux coefficients continus et aux coefficients discrets :

La découverte en 1963 de ce que le formalisme des six opérations se retrouve à la fois dans le contexte de coefficients continus et dans celui de coefficients discrets amène Grothendieck à se demander s'il existerait une théorie commune rassemblant les deux types de coefficients (p. 1357) :

≪ Dès cette époque, j'étais intrigué, sans trop m'y arrêter il est vrai, par la question d'une théorie qui serait ≪ commune ≫, que ce soit dans le cadre schématique, ou analytique complexe, ou même topologique – une théorie qui ≪ coifferait ≫ les deux types de coefficients.

La cohomologie de De Rham (une vieille amie à moi) donnait une première indication dans ce sens, suggérant de chercher un ≪ principe commun ≫ dans la direction des ≪ modules à connexion intégrable ≫ (ou des ≪ modules stratifiés ≫ peut-être). Ceux-ci donnent naissance à une ≪ cohomologie de De Rham ≫ (à coefficients discrets, moralement), laquelle se trouve ainsi mise en relation avec la cohomologie cohérente.

Cette approche m'a suggéré ultérieurement l'idée de ≪ cristal ≫ et de ≪ cohomologie cristalline ≫, sans pour autant suffire encore (semblait-il) à fournir la clef, pour la description d'un formalisme complet des six variances pour des types de ≪ coefficients ≫ qui, en un sens convenable, engloberaient à la fois les coefficients discrets (≪ constructibles ≫), et les coefficients continus. ≫

Il rappelle (p. 1358) que, dès les années 1950, il savait ≪ qu'on peut généraliser le théorème de dualité de Serre au cas d'un complexe d'opérateurs différentiels entre faisceaux localement libres sur un schéma relatif propre et lisse, de façon à englober aussi la cohomologie de De Rham (donc, moralement, une cohomologie à coefficients discrets). ≫

C'était là un résultat de dualité très proche de ce que développera Mebkhout dans le cadre analytique à partir de la seconde moitié des années 1970 et que Grothendieck découvre au moment où il écrit ≪ Récoltes et Semailles ≫.

Il précise que, pour continuer dans cette direction, il lui avait tout simplement manqué alors la catégorie abélienne des $\mathcal{D}$-Modules et la notion induite de quasi-isomorphisme entre complexes de $\mathcal{D}$-Modules :

≪ Je n'avais pas poursuivi alors dans cette voie, surtout, je crois, parce que je ne voyais pas comment faire une ≪ catégorie dérivée ≫ convenable avec les complexes d'opérateurs différentiels, à défaut d'une bonne notion de ≪ quasi-isomorphisme ≫.

Il est vrai aussi que l'isolement dans lequel je travaillais, sur des questions (cohomologie cohérente) qui visiblement n'intéressaient personne d'autre au monde que moi, n'était guère stimulant pour entasser une généralisation supplémentaire (avec les opérateurs différentiels remplaçant les morphismes linéaires) par-dessus celles que j'avais déjà dégagées dans mon coin, au cours des années précédentes.

J'étais tout prêt pourtant du point de vue de Mebkhout, où le passage aux $\mathcal{D}$-modules correspondants (aux composantes d'un complexe d'opérateurs différentiels) donne une clef d'une simplicité parfaite, pour construire la catégorie dérivée qu'il faut.

Dès 1966 d'ailleurs (mais sans m'en rendre compte clairement alors), j'avais en main un point de vue dual, qui m'aurait permis de faire une catégorie dérivée à coups de ≪ pro-modules stratifiés ≫ (idée développée par la suite par Deligne, dans une ébauche d'une théorie des coefficients de De Rham). ≫

Grothendieck se souvient que Deligne a consacré à ce thème un séminaire d'une année entière, avant de renoncer à poursuivre dans cette voie.

Il poursuit l'explicitation du ≪ point de vue dual ≫ qu'il avait alors à sa disposition :

≪ En effet, en associant à tout Module cohérent le pro-Module de ses parties principales d'ordre infini, lequel est muni d'une stratification canonique, on associe à un complexe d'opérateurs différentiels un complexe de tels pro-Modules stratifiés, dont l'hypercohomologie cristalline s'identifie à l'hypercohomologie zariskienne du complexe d'opérateurs différentiels envisagé. (Voir mes exposés ≪ Crystals and the De Rham cohomology of Schemes ≫ – notamment par. 6.) On peut alors définir la notion de ≪ quasi-isomorphisme ≫ pour un morphisme (différentiel) entre complexes d'opérateurs différentiels, de la façon habituelle, en termes des complexes de pro-Modules stratifiés associés. ≫

La publication très incomplète de ses travaux sur la dualité discrète et de son formalisme général de dualité :

Grothendieck rappelle (p. 1351) que ses travaux sur la dualité étale ont été ≪ exposés dans un ou deux chapitres de SGA 4, et surtout dans le séminaire SGA 5, qui y était entièrement consacré ≫.

Mais c'est pour aussitôt prendre conscience (p. 1351-52) qu'une large part de ce qu'il avait exposé oralement n'a jamais été publiée :

≪ Mis à part quelques textes précurseurs sporadiques (dans les séminaires Cartan et Bourbaki des années 1950), il n'y a aucun texte systématique publié, et de ma plume, exposant le formalisme et le yoga de dualité, que ce soit dans le contexte cohérent, ou dans le contexte étale. Les exposés de SGA 4 consacrés à ce thème, centrés autour du seul « théorème de dualité globale » pour un morphisme séparé de type fini (en établissant que $Rf_!$, $Rf^!$ sont adjoints), ont été rédigés par Deligne deux ou trois ans après le séminaire, d'après mes notes manuscrites. »

Il précise : « Cette rédaction de Deligne se place après le séminaire SGA 5. D'ailleurs Deligne n'a pas suivi mes notes à la lettre, mais une variante de ma méthode, que Verdier avait introduite dans le contexte des espaces localement compacts en 1965 (en reprenant pour l'essentiel le modèle étale). »

La variante en question consiste à montrer a priori que les foncteurs $Rf_!$ ont des adjoints à droite $Rf^!$.

Quant au séminaire SGA 5, Grothendieck écrit (p. 1352) qu'il a été « pratiquement séquestré pendant onze ans » par ses élèves cohomologistes, « pour être finalement publié, copieusement pillé et méconnaissable ».

Il commente (p. 1352-53) : « C'est là, dans la ruine de ce qui fut un des plus beaux séminaires que j'aie développés et, avec SGA 4, le plus crucial de tous dans mon œuvre de géomètre – c'est là la seule trace écrite de ma main, ou du moins d'après des notes de ma main, qui évoque tant soit peu le formalisme et le yoga de la dualité étale, et au-delà de ce yoga encore partiel, et irrésistiblement suggéré par lui, celui des six opérations. Mes élèves ont pris soin d'effacer toute trace de ce dernier yoga, d'une force suggestive exceptionnelle, qui avait inspiré mon œuvre sur la cohomologie tout au long des années 1960. C'était là véritablement le « nerf » dans l'idée-force des « types de coefficients » dont le yoga des motifs est l'âme ... »

Il insiste encore (p. 1381) : « Le yoga des six opérations fait partie intégrante de cette vaste « vision unificatrice » développée dans les séminaires SGA 4 et SGA 5. Je dirais même que ce yoga est le thème central du séminaire oral SGA 5 ou, pour mieux dire, qu'il en est le « nerf » et l'âme. »

Il déplore d'autant plus amèrement que ce « yoga » ait disparu du volume publié SGA 5 que, à ses yeux, « la vision-force des six opérations a donné des preuves éloquentes de sa puissance ». Il précise en effet (p. 1382) : « Pour moi, le signe concret le plus éclatant peut-être de cette puissance, se trouve dans la maîtrise que nous possédons de la cohomologie étale. Pour arriver à cette maîtrise, en 1963, la vision « six opérations » qui me venait de la dualité cohérente a été mon fil conducteur constant. »

Il ajoute encore (p. 1383) : « Avec les conjectures de Weil et avec l'intuition omniprésente des topos, la vision des six opérations a été ma principale source d'inspiration dans mes réflexions cohomologiques tout au long des années 1955-1970. C'est dire que la « puissance » de cette vision est pour moi une évidence, ou pour mieux dire, une réalité dont j'ai fait l'expérience quasiment quotidienne pendant quinze ans de ma vie de mathématicien. Cette expérience s'est d'ailleurs confirmée encore de façon frappante ces toutes dernières semaines, dès que j'ai repris contact avec les « chantiers à l'abandon » des coefficients cristallins et de De Rham et celui des motifs. »

Il précise en note :

« Il est entendu que la vision elle-même a pris forme progressivement au cours de cette période, à partir des premiers germes contenus dans mon article de 1955 « Sur quelques points d'algèbre homologique » (au Tohoku Math. Journal).

Elle est arrivée à pleine maturité en 1963, avec le soudain démarrage de la cohomologie étale. Celui-ci se produit (comme par hasard) en les jours-mêmes à peu de choses près, où j'introduis le « foncteur manquant » $Rf_!$ (image directe à supports propres). Mais le rôle des six opérations comme « vision-force » et comme fil conducteur omniprésent, n'est devenu pleinement conscient, je crois, qu'avec le séminaire SGA 5.

Dès 1966, avec le démarrage de la cohomologie cristalline, il était clair pour moi que le premier objectif (au-delà du programme limité « de rodage » qui sera accompli dans le travail de thèse de Berthelot) était d'arriver à un formalisme des six opérations (et de bidualité) pour les « bons » coefficients cristallins. »

Or, l'expression « six opérations », que Grothendieck avait introduite et couramment employée lors de ses exposés oraux, est absente du volume publié SGA 5, ainsi que de tous les articles et livres publiés par quiconque avant que lui-même écrive et diffuse « Récoltes et Semailles ». C'est par ce dernier texte qu'elle est finalement passée sous forme écrite et qu'elle est parvenue jusqu'à nous.

Grande est la surprise de Grothendieck quand il se rend compte (p. 1464) que l'expression « six opérations » est inconnue en dehors du cercle de ses élèves et de ceux qui avaient suivi les séminaires SGA oraux :

« Mebkhout m'a dit qu'avant que je lui en parle lors de notre rencontre il y a deux ans, il n'avait jamais entendu prononcer les mots « six opérations » – il se demandait bien de quelles « opérations » je voulais parler ! »

Il commente (p. 1464-1465) :

« Avec le recul de vingt ans, je me rends compte que dans les « textes de référence » cités, faits avec le plus grand soin, voire avec brio – alors que tout le « vrai travail » (suivant les desiderata courants) est fait, culminant en « la » formule de dualité principale, la formule d'adjonction entre $Rf_!$ et $Rf^!$ (la seule quasiment jugée digne d'attention et d'efforts, quitte à l'oublier le lendemain, comme on oublie les arbres quand on n'a pas vu la forêt ...) – que pourtant dans tous ces textes le principal n'est pas dit et n'a pas passé de l'auteur au lecteur (à supposer qu'il soit bien vu et senti par l'auteur lui-même). « Le principal » est un « yoga », une « philosophie », un fil conducteur à toute épreuve à travers (en l'occurrence) la jungle cohomologique en géométrie algébrique (et ailleurs). »

Un yoga Grothendieckien de dualité et une théorie des topos qui, parvenus à pleine maturité, méritent d'entrer dans le patrimoine commun :

Il regrette (p. 44) que le « yoga grothendieckien de dualité (catégories dérivées et six opérations) » et celui des topos, qui étaient « parvenus à pleine maturité » dès avant son départ, ne « soient pas dès ce moment-là entrés dans le patrimoine commun » : au contraire, parmi ses travaux qu'il considère comme les plus importants, les catégories dérivées, le formalisme de dualité des six opérations et les topos sont devenus comme ≪ trois frères ou sœurs d'infortune ≫ traités de ≪ bombinage ≫ par le consensus actuel ≫ (p.425).

Il déplore ainsi au sujet des catégories dérivées (p. 1293) :

≪ Après mon départ et jusque vers l'année de la parution du volume ≪ SGA 4 1/2 ≫, mes élèves cohomologistes ont instauré un boycott tacite et efficace contre les catégories dérivées, lesquelles avaient constitué l'outil conceptuel clef pour développer le formalisme de dualité (≪ six opérations ≫ et bidualité), dans le contexte des coefficients ≪ cohérents ≫, puis ≪ discrets ≫. Malgré son rôle crucial dans la démonstration de la formule de Lefschetz-Verdier, et dans celle aussi des formules de dualité ≪ classiques ≫ dans le contexte étale, ce formalisme lui-même, en tant que structure mathématique et ensemble conceptuel cohérent, a été l'objet du même boycott et qui dure jusqu'à aujourd'hui encore à commencer par le nom même ≪ six opérations ≫ qui est toujours anathème. ≫

Il est ≪ bien clair ≫ pour Grothendieck, écrit-il (p.443), que ≪ le développement de la cohomologie étale, que tout le monde utilise aujourd'hui sans y regarder à deux fois (ne serait-ce qu'implicitement via feues les conjectures de Weil ...), n'aurait pu se faire sans le bagage conceptuel que représentaient les catégories dérivées, les six opérations, et le langage des sites et des topos (développé d'abord pour cette fin précisément), sans compter SGA 1 et SGA 2 ≫.

Il déplore (p. 429-430) que ≪ les topologues et même les géomètres algébristes qui font mine de s'intéresser à la cohomologie, continuent à qui mieux mieux à ignorer l'existence même du formalisme de dualité, tout comme le langage des catégories dérivées qui le fonde ≫, et que, s'agissant de ce dernier langage, la ≪ bonne notion de catégorie triangulée, dont la version Verdier est une forme encore très provisoire et insuffisante ≫, n'ait pas été davantage ≪ explicitée ≫.

Au sujet de son programme de fondements de la géométrie algébrique ≪ dont seulement une petite partie a été réalisé ≫ et qui se serait ≪ arrêté net après son départ ≫, il écrit (p. 444) :

≪ L'arrêt m'a frappé surtout dans le programme de dualité, que je considérais particulièrement juteux. ≫

Pourtant, ≪ les travaux de Zoghman Mebkhout, poursuivis contre vents et marées, se situent dans le fil de ce programme (renouvelé par l'apport d'idées imprévues) ≫.

Il prédit (p. 429) que l'ubiquité du formalisme de dualité ≪ ne manquera pas de se confirmer pour les autres types de coefficients, quand le blocage qui s'est exercé à l'encontre du développement et d'une utilisation de grande envergure de ce formalisme se sera effrité ≫.

Dédain, dérision, brigandage, imposture et mystification :

Il est impossible de présenter le thème de la dualité tel qu'il est traité dans ≪ Récoltes et Semailles ≫ sans citer les accusations que Grothendieck y formule de marques de ≪ dédain ≫ de certains de ses anciens élèves vis-à-vis du formalisme de dualité, ou d'appropriations indues de notions et de résultats constitutifs de ce formalisme que lui et nul autre avait dégagé.

Cela se manifeste tout particulièrement à ses yeux par le retard de publication du volume SGA 5 (publié en 1977 comme LNM 589, alors que le séminaire oral s'était tenu en 1965/66), et par le fait que certains de ses exposés les plus importants (comme les exposés d'ouverture et de clôture) n'ont jamais été rédigés par les volontaires à qui il avait confié ses notes écrites.

Cela se manifeste aussi par la disparition du volume publié SGA 5 de ce qui constituait le fil conducteur du séminaire oral, l'exposé du formalisme général des six opérations et jusqu'au nom de ce formalisme. C'est ainsi qu'il écrit (p. 1353) :

≪ Rétrospectivement, et un an presque jour pour jour après la découverte du ≪ massacre ≫ de l'édition SGA 5, il me semble avoir mis le doigt aujourd'hui sur ce qui constitue le nerf même de cette opération-massacre. Ce n'est pas la disparition de tels exposés ou de tels autres, annexés par un Deligne, pillés par un Verdier, sauvés du désastre par Serre ou arrachés d'un ≪ tout ≫ harmonieux, pour le seul plaisir dirait-on, par un Illusie. Mais c'est l'âme et le nerf même de ce séminaire, le fil conducteur constant et omniprésent tout au long de ce vaste travail fait par un seul – c'est lui que Illusie s'est attaché à éradiquer de SGA 5 sans laisser (quasiment) aucune trace.

Le nom même ≪ six opérations ≫ est absent de ce séminaire, comme il est absent des travaux de mes élèves, qui ont pu faire acte tacite de ne prononcer ces mots qu'en les très rares occasions où l'un ou l'autre se trouve confronté encore à l'ouvrier déclaré défunt, auquel (tout défunt qu'il soit) il convient pourtant de donner le change ... ≫

Cela se manifeste encore par la manière dont ses anciens élèves et collègues du monde académique ont progressivement donné à certaines de ses théories les plus importantes des noms autres que celui de leur auteur.

C'est ainsi qu'il raconte (p. 1185) le processus qui a touché sa théorie de la dualité :

≪ Sur ma proposition, Verdier avait développé après 1963 une théorie de dualité ≪ six opérations ≫ dans le contexte des espaces topologiques ordinaires, en suivant le maître d'œuvre que j'avais développé dans le contexte algébrique cohérent et étale. Cette dualité avait été baptisée par mes élèves cohomologistes, comme il se doit, ≪ dualité de Verdier ≫ ou ≪ de Poincaré-Verdier ≫, sans mention de ma modeste personne. ≫

Puis il poursuit en faisant référence à un article ultérieur de Verdier, ≪ Classe d'homologie associée à un cycle ≫ (Astérisque 36, p. 101-151) :

≪ Dans ≪ la bonne référence ≫ de 1976, Verdier reprend d'autre part, dans le contexte analytique et sans me nommer, une partie du formalisme que j'avais développé dans le cadre cohérent dans les années 1950 (sans avoir rien à y changer). Du coup cette dualité, dans le cadre analytique, prend le nom encore de ≪ dualité de Verdier ≫, ou parfois ≪ de Serre-Verdier ≫, toujours sans mention de ma personne. ≫

Il poursuit encore jusqu'à l'aboutissement du processus :

≪ Mais (par un coup en retour génial !) il est bien évident que la dualité cohérente algébrique n'est qu'une ≪ traduction purement algébrique ≫ de la théorie analytique transcendante, de même que la dualité étale est une telle « traduction » pour la théorie topologique transcendante. Il s'imposait donc, dès lors, de les baptiser également « dualité de Verdier » (Serre et Poincaré étant oubliés pour la circonstance, car ils sont loin). D'après ce que m'a dit Deligne, c'est bien là ce que « tout le monde » s'est empressé de faire. »

Il commente avec ironie (p. 497-498) :

« Après tout cela, je n'avais plus qu'à suivre le mouvement et faire les quelques adaptations qui s'imposaient pour développer la dualité de Poincaré-Verdier et celle de Serre-Verdier dans le cadre bien particulier, ma foi, de la cohomologie étale ou cohérente des schémas ... »

Il précise (p. 1369-1370) ce qu'il en est exactement :

« Pourtant aucune des idées essentielles pour l'une ou l'autre dualité (et encore moins, si on peut dire, pour celle qui les coiffe) ne sont dues à Verdier. En fait, à part les théorèmes de dualité de Poincaré et de Serre sous leur forme initiale, lesquels m'ont bien sûr servi de points de départ, toutes les idées essentielles sont contenues dans le formalisme des six variances et de bidualité que j'ai introduit et longuement développé dans les deux contextes, cohérent et discret, dans la solitude. []

Quant au nom « dualité de Serre » qu'on a fini par donner à la théorie de dualité cohérente que j'avais développée pendant des années et dans une solitude totale, il a d'autant plus de sel (et Serre, qui n'en demandait pas tant, l'appréciera mieux que personne !), que Serre avait manifesté un total désintérêt pour mes travaux de dualité, me privant ainsi de l'unique interlocuteur que j'aurais pu espérer avoir pour mes cogitations ! »

Il constate que des mathématiciens plus jeunes qui n'ont pas connu la période d'avant 1970 croient naïvement que les différentes dualités auxquelles ses élèves ont donné le nom de Verdier sont dues à ce dernier. Echangeant en effet avec Mebkhout, il réalise (p. 584) que « pendant des années, il était bel et bien persuadé que la théorie de dualité dite « de Verdier » était bel et bien due à Verdier, ou tout au moins à « Serre-Verdier », et de même que l'idée de la dualité qu'il appelle « de Poincaré-Verdier » est bel et bien due à Verdier ».

Constatant que son nom est absent du chapitre de Verdier « Catégories dérivées, état 0 » du volume SGA 4 1/2 publié par Deligne, Grothendieck conclut (p. 473) que le « yoga des catégories dérivées » et le « yoga de dualité » ont été « appropriés par Verdier avec l'encouragement actif de Deligne ».

Il note d'ailleurs (p. 513-514) que, « sous la plume de Deligne, la dualité étale en géométrie algébrique prend nom de dualité de Verdier ». C'est dans le volume Astérique numéro 100, « Analyse et topologie sur les espaces singuliers », qui expose la théorie des faisceaux pervers.

Il relève (p. 554) dans le même volume : « Le théorème de bidualité que j'avais dégagé dans les années 1950 est rebaptisé pour la circonstance dualité de Verdier ».

Il qualifie (p. 158-159) de « mystification » ou « imposture » ce nom de « dualité de Verdier », tout comme ceux de « dual de Verdier » et de « conjecture de Deligne-Grothendieck » dont il sera question plus loin.

Grothendieck lit enfin (p. 507) dans l'introduction du volume publié par Deligne sous le sigle « SGA 4 1/2 » et le nom « Cohomologie étale », des phrases qui expriment à ses yeux « un propos délibéré de dérision » (p. 513) : « Le but du volume est d'éviter au non-expert « le recours aux exposés touffus de SGA 4 et SGA 5 », d'« élaguer les détails inutiles », de « permettre à l'utilisateur d'oublier SGA 5, qu'on pourra considérer comme une série de digressions, certaines très intéressantes ». »

Au-delà de la dérision, ces expressions de l'introduction, l'existence même du volume SGA 4 1/2 qui ne correspond à aucun séminaire SGA s'étant effectivement tenu, sa publication comme LNM 569 précédant celle du volume SGA 5 comme LNM 589, et son nom, sont à ses yeux autant d'éléments d'une « mystification sans vergogne » (p. 620) qui s'affiche dès la couverture. Il s'exclame (p. 1554) :

« Dans l'un de ces textes, la disgrâce éclate dans le nom déjà qu'il s'est donné, qui est en lui-même une imposture (de génie ...) : le texte nommé « SGA 4 1/2 » (comme sigle de référence courant) et aussi « Cohomologie étale » – par P. Deligne, avec la collaboration (entre autres et en plus de L. Illusie et J.-L. Verdier) de A. Grothendieck. »

Il développe (p. 1240-1243) :

« Par ce seul nom déjà, le volume se présente comme le texte central et fondamental sur la cohomologie étale, destiné à se substituer aux « exposés touffus de SGA 4 et SGA 5 » qu'on pourra considérer comme une série de digressions », dont « certaines très intéressantes » il est vrai mais que le texte central « devrait permettre à l'utilisateur d'oublier ». [] Ce seul nom lapidaire « SGA 4 1/2 » énonce et pose l'évidence sans réplique d'une antériorité de ce texte par rapport aux « digressions » nommées SGA 5 (lesquelles, comme il n'aurait pu certes en être autrement, ont bel et bien été publiées après lui ...), et du même coup aussi, elle pose comme une évidence une (prétendue) dépendance logique de SGA 5 par rapport au texte « antérieur ».

Cette invraisemblable imposture d'une soi-disant dépendance logique de SGA 5 par rapport au texte apocryphe est bel et bien affirmée dans l'introduction à celui-ci, où l'auteur annonce sans sourciller (et sans que personne avant moi – vu les temps qui courent – y trouve rien de particulier ...) :
... son existence même [celle de « SGA 4 1/2 »] *permettra prochainement de publier SGA 5 tel quel* (c'est moi qui souligne) – lire : à l'état d'une dépouille saccagée et copieusement pillée ...

[]

La même imposture de la « dépendance logique » est clairement suggérée dans l'introduction de SGA 5 par Illusie. Elle est de plus rendue plausible, pour un lecteur non prévenu, par les innombrables références à « SGA 4 1/2 » dont les rédacteurs tardifs de mes exposés (ou de ceux, du moins, qu'on a bien voulu inclure dans l'édition-massacre) se sont plu à truffer leurs rédactions. Beaucoup de ces références ne sont d'ailleurs nullement des références-bidon, mais se rapportent à deux des exposés du séminaire originel (l'un rédigé par Illusie, l'autre – particulièrement crucial – par Deligne), qui ont été incorporés sans autre forme de procès dans le volume nommé « SGA 4 1/2 » – en se gardant bien de rien me demander ou seulement de m'en informer, mais comme une chose qui (en l'absence du défunt maître) leur appartiendrait de droit ...

Cet acte de brigandage permet de plus à mon ex-élève Deligne d'arriver à ce brillant renversement des rôles, de pouvoir me présenter sur la couverture du livre (et en se gardant tout autant de me consulter ...) comme son « collaborateur » (pour le développement de la cohomologie étale !) – collaborateur un peu « confus » sur les bords il est vrai, mais « collaborateur » quand même ... »

Grothendieck raconte encore (p. 1168) l'explication qu'il a eue à ce sujet avec Deligne après sa découverte de l'existence de ce volume :

« J'ai dû lui dire quelque chose comme : « Et alors, tu trouves que ça a été une belle chose, ce titre SGA 4 1/2, pour suggérer que c'est des choses qui viennent avant SGA 5 – là où tu avais appris, onze ans avant, les maths qui t'ont servi tous les jours jusqu'à aujourd'hui encore ! »

Il m'a répondu du ton de quelqu'un qui réciterait une leçon, que s'il l'avait appelé SGA 4 1/2, c'était seulement pour indiquer une relation de dépendance logique, et non d'antériorité.

Voilà donc qu'il m'était donné d'entendre de mes oreilles, et de la bouche de l'intéressé lui-même, cette « farce » à tel point énorme, que j'avais eu peine à en croire le témoignage de mes yeux, quand je l'avais lue noir sur blanc, sous sa plume d'abord (dans SGA 4 1/2), puis sous celle d'Illusie (dans le volume SGA 5, qui suivait, comme il était « logique », celui de mon prédécesseur ...) !

J'ai dû lui dire qu'il savait tout aussi bien que moi que SGA 5 se « tenait » entièrement, sans préalable ni conjecture d'aucune sorte, et qu'il ne dépendait ni logiquement ni d'aucune autre sorte des contributions ultérieures. »

Il rappelle (p. 513) que « le séminaire oral SGA 5 a représenté le premier contact du jeune homme Deligne avec les schémas, les techniques cohomologiques et notamment le formalisme de dualité, et avec la cohomologie ℓ-adique, quand il a débarqué à l'IHES à l'âge de 21 ans, dans le but d'apprendre la géométrie algébrique avec lui ».

S'attachant à réfuter chaque phrase ou expression qu'il découvre et estime incorrecte, Grothendieck relève en particulier (p. 511-512) une phrase du « Fil d'Ariane » de SGA 4 1/2 par laquelle Deligne affirme que « pour établir en cohomologie étale un formalisme de dualité analogue à celui de la dualité cohérente, Grothendieck utilisait la résolution des singularités et la conjecture de pureté, donnant ainsi l'impression que ce formalisme n'est finalement établi que par lui, Deligne, dans le cas (suffisant pour beaucoup d'applications) des schémas de type fini sur un schéma régulier de dimension 0 ou 1 ».

Il commente : « Il sait très bien que le formalisme des six variances (donc la théorie de dualité globale) a été établi par moi sans aucune conjecture, et que sa restriction n'est fondée que pour le théorème de bidualité (ou de dualité locale). »

Il rappelle (p. 633) le contenu du séminaire oral en ce qui concerne les propriétés de stabilité des complexes constructibles :

≪ Il y avait des exposés de finitude pour les opérations $R^i f_*$ (f non propre), et comme corollaire, pour les opérations $R\mathcal{H}om$ et $Rf^!$. Le théorème-clef était démontré par une technique de résolution des singularités à la Hironaka (valable donc dans les seuls cas où on dispose de la résolution). Ces arguments que j'avais utilisés sont devenus d'usage courant depuis le séminaire. Deligne est arrivé à prouver ces théorèmes de finitude, ainsi que celui de bidualité, sous d'autres hypothèses plus serviables, vérifiées dans la plupart des applications. [] Cette circonstance est servie comme ≪ raison ≫ pour amputer le séminaire de cette partie-là. Quant au théorème de bidualité, du coup il devient sous la plume d'Illusie ≪ théorème de bidualité de Deligne ≫. Ce n'était que justice, puisque dans le cas analytique Verdier s'en était déjà adjugé la paternité dès l'année précédente (sans avoir même eu à se mettre en frais pour trouver une autre démonstration). ≫

Dans le séminaire oral SGA 5, ajoute Grothendieck (p. 624), ≪ tout ce monde ≫, c'est-à-dire ses anciens élèves, a appris ≪ ce principe de démonstration, utilisé aussi bien pour démontrer le théorème de bidualité en cohomologie étale (dans les cas où on dispose de la résolution des singularités), que les théorèmes de finitude pour les $R^i f_*$ sans hypothèse de propreté sur f ≫ (c'est-à-dire la stabilité de la propriété de constructibilité par les foncteurs Rf_*) ≪ et de même pour les $R\mathcal{H}om$, $Rf^!$ ≫. Mais ≪ ces théorèmes de finitude ont été également escamotés de la version publiée de SGA 5, pour être joints à SGA 4 1/2 ≫.

Le privilège à partager d'être ≪ dans le coup ≫ pour le formalisme de dualité :

Citant ses ≪ cinq élèves cohomologistes ≫ (p. 616), il leur reproche collectivement d'avoir gardé pour eux trop longtemps – voire au-delà de la publication du volume amputé SGA 5 qu'il appelle pour cette raison une ≪ édition-massacre ≫ (p. 513) – une grande partie du nouveau formalisme de dualité qu'il avait dégagé et avait développé devant eux (p. 617) :

≪ C'est d'avoir suivi de séminaire (et le précédent) et de l'avoir travaillé chez eux tant bien que mal, et rien d'autre, qui a fait qu'ils étaient désormais ≪ dans le coup ≫ pour le formalisme de dualité, et ils étaient les seuls à l'être. Ce privilège, il me semble, créait pour eux une obligation : c'est de veiller à ce que ce privilège ne reste pas entre leurs seules mains, et que ce qu'ils avaient appris de ma bouche, et qui a été un bagage indispensable dans tout leur travail ultérieur jusqu'à aujourd'hui, soit mis à la disposition de tous, et ceci dans les délais raisonnables et d'usage – de l'ordre tout au plus d'une année, voire deux à la rigueur. ≫

Il leur reproche aussi d'utiliser quand ils en ont besoin des outils tirés de la ≪ panoplie ≫ qu'il avait forgée, mais sans transmettre la ≪ vision ≫ qui avait inspiré la création de ces outils (p. 1356) :

≪ Tels ingrédients épars de ma panoplie sont utilisés ici et là sans allusion à ma personne (et avec des pères de rechange tout trouvés), et tout particulièrement le formalisme de bidualité, depuis le rush sur la cohomologie d'intersection []. Mais la vision, d'une simplicité enfantine et d'une élégance parfaite, qui a donné pourtant des preuves éloquentes de sa puissance, reste ignorée, objet du dédain de ceux qui préfèrent dédaigner (et piller ...) plutôt que comprendre. ≫

Le destin des notes confiées à des volontaires rédacteurs, et l'intérêt d'essayer de les retrouver :

Le sujet des exposés disparus l'amène à mentionner (p. 649-650) un fait général qui concerne tous ses exposés :

≪ Comme c'était mon habitude, j'ai laissé toutes mes notes manuscrites aux volontaires rédacteurs (sic), et il ne me reste plus aucune trace écrite du séminaire oral, dont j'avais bien entendu un ensemble de notes manuscrites complet, même si certaines étaient succinctes. ≫

Il explique (p. 1354) la nécessité de faire appel à des volontaires rédacteurs par la profusion des idées nouvelles qui jaillissaient dans ses travaux et par ses propres exigences de développement systématique :

≪ La tournure qu'allaient prendre les événements avait été préparée dès avant mon départ et tout au long des années 1960 par la situation de division où je me suis trouvé, accaparé d'une part par d'interminables tâches de fondements que j'étais le seul à pouvoir ou à vouloir assumer, et d'autre part sollicité constamment par des questions sur des thèmes souvent éloignés des bases premières qui m'absorbaient dans l'instant, et par là même, bien souvent, plus intensément et plus directement fascinants.

Rarement, parmi les thèmes mêmes que je m'étais laissé le loisir d'approfondir et de développer (tel celui de la dualité), ai-je trouvé le loisir aussi de rédiger sous forme propre à la publication les résultats de mes travaux (conformément aux critères exigeants qui sont les miens). C'est ainsi que souvent j'ai été amené à laisser à d'autres (à qui je faisais totalement confiance, certes) le soin d'une rédaction (comme cela a été le cas pour le thème ≪ dualité ≫, tant dans le cadre cohérent que le cadre discret étale), ou de développer telles idées de départ que je connaissais fécondes (comme celle de catégorie dérivée, ou la cohomologie cristalline, pour ne citer que celles-là parmi un grand nombre). ≫

Ce rappel que fait Grothendieck qu'il avait pour chaque exposé oral des notes écrites qu'il confiait à des ≪ volontaires rédacteurs ≫ pose la question de savoir ce qu'est devenu chaque paquet de notes.

Il faudrait pouvoir en retrouver et publier la plus grande partie possible, ne serait-ce d'abord que sur un site internet dédié à cette fin.

Les notes correspondant à des exposés qui n'ont jamais été rédigés par les ≪ volontaires rédacteurs ≫ à qui Grothendieck les avait confiés seraient particulièrement précieuses, mais même celles des exposés qui ont été rédigés intéresseraient sûrement beaucoup de mathématiciens d'aujourd'hui et des générations futures.

Cela concerne particulièrement le séminaire SGA 5, dont la version publiée a selon Grothendieck très mal rendu compte du séminaire oral, mais aussi l'ensemble du séminaire SGA et d'autres exposés qu'il avait donnés parallèlement, comme par exemple une série d'exposés sur les motifs donnée à l'IHES en 1967 (en note p. 464).

Les exposés disparus d'ouverture et de clôture du séminaire SGA 5 :

La brève description que donne Grothendieck (p. 632) du contenu des exposés d'ouverture et de clôture du séminaire oral SGA 5 fait particulièrement regretter qu'ils ne figurent pas dans le volume publié :

≪ Deux de mes exposés oraux n'ont jamais été mis à la disposition du public sous quelque forme que ce soit.

L'un est l'exposé de clôture sur des problèmes ouverts et conjectures, qui ≪ n'a malheureusement pas été rédigé ≫ – et l'auteur de l'introduction à l'édition-massacre a jugé inutile en effet de mentionner seulement de quels problèmes ouverts et conjectures il s'agissait. Et pourquoi donc aurait-il pris cette peine, quand ce n'étaient que des problèmes (que chacun est libre de se poser à sa guise !) et des conjectures (pas même démontrées !).

L'autre est l'exposé qui ouvrait le séminaire, et le plaçait d'emblée dans un contexte plus vaste (topologique, analytique complexe, algébrique) et passait en revue les formules du type Euler-Poincaré, Lefschetz, Nielsen-Wecken, dont certaines constituaient une des principales applications du séminaire. ≫

Retrouvant l'exposé d'ouverture grâce à Illusie qui lui a renvoyé ses notes à sa demande, Grothendieck constate qu'il s'agit en fait de trois exposés, dont il entreprend de décrire le contenu disparu (p. 1352-1353) :

≪ Le premier exposé consistait en un vaste ≪ tour d'horizon ≫ de ce qui avait été accompli dans le séminaire précédent SGA 4, en ce qui concerne le formalisme cohomologique étale et ses relations à divers autres contextes.

Le deuxième exposé développe en long et en large le formalisme ≪ abstrait ≫ des six variances. Il y a un formulaire essentiellement complet, mais sans effort encore pour cerner les compatibilités entre isomorphismes canoniques. (C'était là une tâche de nature plus technique, inutile à un moment où je tenais avant tout à ≪ faire passer ≫ ce yoga de dualité, dont je sentais bien toute la force.)

Inutile de dire qu'il n'y a trace dans l'édition-Illusie ni de l'un ni de l'autre exposé. J'avais fini par croire que (accaparé par des aspects plus techniques du séminaire) j'avais sans doute omis d'exposer la vision unificatrice. ≫

Il revient plus loin (p. 1475) sur le contenu de ces exposés d'ouverture, pour déplorer amèrement qu'il ait disparu du volume publié :

≪ Dès le tout début du séminaire oral SGA 5 (dans mon deuxième exposé), j'avais pris grand soin de développer en long et en large le formulaire ≪ abstrait ≫ des six opérations, qui allait dominer l'ensemble du séminaire à venir. []

Par ailleurs, tout au cours du séminaire oral, je n'ai pas manqué de référer constamment à l'ubiquité du formalisme cohomologique que je développais, valable en principe pour toutes sortes d'autres types de ≪ coefficients ≫ que les ≪ coefficients ℓ-adiques ≫.

Illusie a pris soin d'extirper de l'édition-massacre aussi bien l'exposé consacré au formalisme des six opérations, que toute allusion à une vision des « coefficients cohomologiques » dépassant le contexte particulier faisant l'objet principal du séminaire. »

Il réalise (p. 1474) l'importance d'une telle présentation d'ensemble de son formalisme général de dualité et de sa vision des « coefficients cohomologiques », et regrette de n'avoir pas écrit au moins quelques mots d'évocation de ce sujet dans l'introduction qu'il avait rédigée pour le volume « Residues and Duality » :

« Avec le recul, je me rends compte à quel point des textes non formels (ne serait-ce que de quelques pages en l'occurrence, et sans aucun effort pour des formulations exactes et systématiques), faisant sentir justement ces « idées-forces » rarement nommées qui se trouvent cachées derrière des textes d'apparence souvent technique – combien de tels textes sont importants pour orienter les chercheurs, et pour apporter de temps en temps un souffle d'air dans une littérature qui a tendance à étouffer par sa technicalité.

A ce sujet, Zoghman [Mebkhout] m'a dit d'ailleurs que les quelques passages de ce genre qu'il a trouvés dans les textes de ma plume lui ont été d'un grand secours. Parmi ceux-ci, il m'a encore dernièrement mis en avant les quelques mots d'introduction que j'avais joints au volume de Hartshorne « Residues and Duality » (volume exposant essentiellement le formalisme des six opérations que j'avais développé dans la seconde moitié des années 1950, dans le cadre cohérent).

Je mesure maintenant à quel point cette introduction lui aurait été plus utile encore, si j'avais pris la peine d'y inclure, ne serait-ce qu'une page ou deux non formelles, expliquant le « yoga des six opérations » et soulignant son importance comme un fil conducteur omniprésent dans l'édification des théories cohomologiques qui attendaient de naître ... »

D'autres exposés absents du volume publié :

D'autres exposés importants du séminaire oral SGA 5 (comme ceux consacrés aux classes de cohomologie et d'homologie des cycles) sont également absents du volume publié.

L'un se retrouve, sans que Grothendieck ait été consulté ou informé, sous la forme d'un chapitre – intitulé « La classe de cohomologie associée à un cycle » et présenté comme « inspiré par des notes de Grothendieck » – du volume SGA 4 1/2.

Le contenu d'un autre exposé réapparaît en partie sous la forme de l'article « Classe d'homologie associée à un cycle » publié par Verdier en 1976.

Les principaux thèmes du séminaire oral SGA 5 qui sont ceux de la théorie de la dualité cohomologique :

Grothendieck prend le temps d'indiquer (p. 648) « quels étaient les principaux thèmes qui ont été développés dans le séminaire oral, et dont le texte publié ne permet de se faire une idée que par recoupements ».

Sa liste est d'autant plus précieuse qu'il s'agit manifestement pour lui de constructions et de propriétés attendues qui devraient se retrouver dans la théorie de dualité cohomologique de tous les contextes géométriques où existe ou devrait exister un formalisme des six opérations.

Voici la description commentée qu'il donne (p. 648-650) :

≪ I) Aspects locaux de la théorie de dualité, dont l'ingrédient technique essentiel est (comme dans le cas cohérent) le théorème de bidualité (complété par un théorème de ≪ pureté cohomologique ≫). J'ai l'impression que le sens géométrique de ce dernier théorème comme un théorème de dualité de Poincaré local, que j'avais pourtant bien expliqué dans le séminaire oral, a été entièrement oublié depuis par ceux qui furent mes élèves.

II) Formules de traces, y compris des formules de traces ≪ non commutatives ≫ plus subtiles que la formule des traces habituelle, se plaçant dans l'algèbre d'un groupe fini opérant sur le schéma envisagé, à coefficients dans un anneau convenable. Cette généralisation venait très naturellement du fait que même dans le cas de formules de Lefschetz du type habituel, mais pour des faisceaux de coefficients ≪ tordus ≫, on était amené à remplacer le schéma initial par un revêtement galoisien (en général ramifié) servant à ≪ détordre ≫ les coefficients, avec le groupe de Galois opérant dessus. C'est ainsi que les formules du type ≪ Nielsen-Wecken ≫ s'introduisent naturellement dans le contexte schématique.

III) Formules d'Euler-Poincaré. Il y avait d'une part une étude circonstanciée d'une formule ≪ absolue ≫ pour des courbes algébriques, à coups de modules de Serre-Swan (généralisant le cas des coefficients modérément ramifiés, donnant lieu à la formule de Ogg-Chafarevitch-Grothendieck plus naïve). D'autre part, il y avait des conjectures inédites et profondes du type Riemann-Roch ≪ discret ≫, dont l'une est réapparue sept ans plus tard, sous le nom de ≪ conjecture de Deligne-Grothendieck ≫, prouvée par MacPherson par voie transcendante. Les commentaires que je n'ai pu manquer de faire sur les relations profondes entre ces deux thèmes (formules de Lefschetz, formules d'Euler-Poincaré) se sont également perdus sans laisser de traces.

IV) Formalisme détaillé des classes d'homologie et de cohomologie associées à un cycle, découlant naturellement du formalisme général de dualité et de l'idée-clef, consistant à travailler avec la cohomologie ≪ à supports ≫ dans le cycle envisagé, en utilisant les théorèmes de pureté cohomologique.

V) Théorèmes de finitude (y compris des théorèmes de finitude génériques) et théorèmes génériques pour la cohomologie à support quelconque. ≫

Grothendieck complète cette liste par la remarque (p. 650) :

≪ Je ne compte pas au nombre des ≪ thèmes ≫ principaux les calculs de quelques schémas classiques et la théorie cohomologique des classes de Chern, qu'Illusie monte en épingle dans son introduction comme ≪ une des plus intéressantes ≫ du séminaire. Comme le programme était chargé, je n'avais pas cru nécessaire dans le séminaire oral de m'attarder sur ces calculs et sur cette construction, vu qu'il suffisait de reprendre, pratiquement textuellement, les raisonnements que j'avais donnés dix ans avant dans le contexte des anneaux de Chow, à l'occasion du théorème de Riemann-Roch. Il était évident d'autre part qu'il fallait l'inclure dans le séminaire écrit, pour fournir une référence serviable à l'utilisateur de la cohomologie étale. ≫

Il mentionne (p. 1180) que ≪ pour la dualité étale ou pour la théorie de Nielsen-Wecken, les arguments classiques étaient inutilisables tels quels ≫, si bien que ≪ il a fallu tout refaire, en prenant les résultats classiques comme un fil conducteur et en oubliant entièrement leur ≪ démonstration ≫ (si on peut l'appeler ainsi) traditionnelle ≫.

Faisant un bilan, il conclut (p. 651) :

≪ Tout cela précisé, le seul des cinq thèmes principaux du séminaire oral qui semble apparaître sous forme complète dans le texte publié est le thème I.

Les thèmes IV et V ont disparu purement et simplement, absorbés par SGA 4 1/2 , avec le bénéfice de pouvoir y référer abondamment et donner l'impression que SGA 5 dépend d'un texte de Deligne se présentant comme antérieur.

Les thèmes II et III apparaissent dans le volume publié sous forme mutilée, et toujours en maintenant la même imposture d'une dépendance par rapport au texte SGA 4 1/2 (lequel est en réalité tout entier sorti du séminaire-mère SGA 4, SGA 5). ≫

Le formalisme des classes d'homologie et de cohomologie associées à un cycle :

En particulier, c'est ≪ toute une série d'exposés ≫ que Grothendieck se rappelle (p. 632) avoir donnée ≪ sur le formalisme des classes d'homologie et de cohomologie associées à un cycle ≫ (avec pour cadre un ≪ schéma ambiant régulier dans le cas cohomologique ≫).

Il commente ironiquement : ≪ Ils ont fait l'objet d'un partage équitable : la cohomologie pour Deligne, l'homologie pour Verdier. ≫

Au sujet de l'article de Verdier de 1976, ≪ Classe d'homologie associée à un cycle ≫, Grothendieck affirme (p. 600) :

≪ A une réserve près, il consiste pratiquement à recopier sur cinquante pages, dans un contexte légèrement différent, des notions, constructions et raisonnements que j'avais développés en long et en large dix ou quinze ans auparavant – terminologie, notations, tout y est textuellement ! Je me serais cru revenu à une séance du séminaire SGA 5 qui avait eu lieu en 1965/66, où ces choses ont été explicitées (apparemment à satiété des participants) pendant une année entière. ≫

De cet article qu'il appelle ironiquement ≪ la bonne référence ≫, il affirme encore (p. 624) :

≪ Mes démonstrations sont recopiées dans le cadre analytique, pour y établir ce que mes élèves et auditeurs de SGA 5 se plaisent depuis lors à appeler la ≪ dualité de Verdier ≫ (qui m'était connue avant d'avoir eu le plaisir de faire sa connaissance). Décidément tout se tient ! La même démonstration (copiée sur moi en même temps que l'énoncé) sert à Verdier comme titre de paternité pour une dualité qu'il n'a apprise nulle part ailleurs que dans le séminaire SGA 5, disloqué et livré au mépris. ≫

En particulier, Verdier ≪ a raflé le théorème de finitude pour les $R\mathcal{H}om$ et le théorème de bidualité, recopiés texto sur le séminaire ≫ (p. 632-633).

Grothendieck précise (p. 1368) :

≪ L'extension, du contexte étale au contexte analytique, de mes résultats de bidualité, et de la stabilité de la constructibilité par l'opération $R\mathcal{H}om$, est d'ailleurs automatique et m'était connue dès 1963. Verdier travaillait alors avec moi depuis trois ans, se mettant dans le bain du yoga des catégories dérivées (dont il s'était chargé de faire la théorie systématique) et de la dualité cohérente. C'est de ma bouche qu'il a appris les techniques qui permettent d'étendre le formalisme de dualité cohérente au cas des coefficients discrets. ≫

Il identifie cependant (p. 603) dans l'article un résultat nouveau important, la démonstration de ce que les foncteurs dérivés d'image directe Rf_* respectent la propriété de constructibilité dans le contexte envisagé par Verdier :

≪ Il y a pourtant un résultat (sans doute) nouveau et fort intéressant dans l'article sur la stabilité des faisceaux discrets analytiquement constructibles par images directes supérieures par un morphisme analytique et propre. Verdier avait appris les notions de constructibilité tous azimuts par ma bouche une quinzaine d'années auparavant, ainsi que la conjecture de stabilité, que je m'étais posée (et dont j'avais parlé à qui voulait l'entendre) vers la fin des années 1950. ≫

Grothendieck précise encore (p. 601-602) :

≪ Pour en revenir à la classe d'homologie (pas confondre !) associée à un cycle, j'avais développé ce formalisme avec un luxe de détails, sur plusieurs exposés, au cours du séminaire oral, devant un auditoire qui demandait grâce (sauf toujours le seul Deligne toujours fringant et frais ...). C'était un des innombrables ≪ longs exercices ≫ que j'ai développés cette année-là sur le formalisme de dualité dans le cadre étale, sentant le besoin d'arriver à une maîtrise complète de tous les points qui me paraissaient devoir être compris à fond. L'intérêt ici était d'avoir un formalisme valable sur un schéma ambiant non nécessairement régulier – le passage à la classe de cohomologie dans le cas régulier, et le lien avec ma vielle construction utilisant la cohomologie à supports et donnant immédiatement la compatibilité avec les cups-produits, étant immédiats. J'ai constaté aussi que cette partie du séminaire fait partie du lot de ce qui n'a pas été repris dans la version publiée. ≫

L'homologie comme cohomologie à valeurs dans un complexe dualisant :

Grothendieck précise comment il avait redéfini l'homologie à partir de la cohomologie (p. 1252) :

≪ L'idée de définir l'homologie d'un schéma (ou ≪ espace ≫ ...) comme son hypercohomologie à valeurs dans un ≪ complexe dualisant ≫ convenable remonte aux années 1950 (dans le cadre cohérent), et avait été reprise par moi, avec un luxe de détails, dans le cadre étale au cours du séminaire SGA 5.

Les méthodes que j'avais développées sur le thème de la classe de cohomologie (d'abord) et d'homologie (ensuite) associée à un cycle, à partir de la seconde moitié des années 1950 (dans le cadre cohérent) et dont j'ai présenté une synthèse (version étale) dans SGA 5, étaient des techniques « passe-partout », s'appliquant aussi bien à des « coefficients » continus (style De Rham ou Hodge) que discrets, et aussi bien dans le cadre schématique qu'analytique ou différentiable (entre autres).

Les besoins d'une telle théorie avaient été d'ailleurs parmi mes principales motivations pour développer (dès les années 1950) un formalisme de la cohomologie « à supports » dans un fermé (avec la suite spectrale fort utile « de passage du local au global »), destiné à fournir un équivalent « algébrique » pour le classique (et élusif) « voisinage tubulaire » d'un sous-espace fermé.

C'est à cette occasion aussi que j'ai développé pour la première fois (tant dans le contexte cohérent que discret) des énoncés du type « pureté » et « semi-pureté » cohomologique. »

La conjecture dite « de Deligne-Grothendieck » comme théorème de type Riemann-Roch à coefficients discrets :

Il reproche à certains de ses anciens élèves d'avoir gardé pour eux-mêmes et leurs relations une partie de ce qu'ils avaient reçu et avaient la responsabilité de partager avec tous.

Il donne comme exemple l'une des conjectures de l'exposé de clôture du séminaire oral (p. 638) :

« Cet exposé de clôture, sûrement un des plus intéressants et des plus substantiels avec l'exposé d'ouverture, n'a visiblement pas été perdu pour tout le monde, comme je vois en prenant connaissance de l'article de MacPherson « Chern Classes for Singular Algebraic Varieties » (Annals of Mathematics, 1974). J'y retrouve, sous le nom de « conjecture de Deligne-Grothendieck », une des principales conjectures que j'avais introduites dans cet exposé dans le cadre schématique. Elle est reprise par MacPherson dans le cadre transcendant des variétés algébriques sur le corps des complexes, l'anneau de Chow étant remplacé par le groupe d'homologie. Deligne avait appris cette conjecture dans mon exposé en 1966, l'année même donc où il avait fait son apparition dans le séminaire où il a commencé à se familiariser avec le langage des schémas et les techniques cohomologiques. »

Or, même dans ce cas de conjecture recyclée, ses anciens élèves n'ont pas transmis de quoi il retournait (p. 644) :

« En parcourant l'article de MacPherson, j'ai été frappé par ce fait, que le mot « Riemann-Roch » n'y est pas prononcé – c'est la raison pour laquelle je n'ai pas immédiatement reconnu la conjecture que j'avais faite dans le séminaire SGA 5 en 1966, qui était pour moi (et est toujours) un théorème de type « Riemann-Roch ». Il semblerait qu'au moment d'écrire son article, MacPherson ne se soit pas même rendu compte de cette parenté évidente. Je présume que la raison en est que Deligne, qui après mon départ a mis cette conjecture en circulation sous la forme qui lui a plu, a pris soin dans la mesure du possible de « gommer » la parenté évidente avec le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck. »

Il considère manifestement comme une grande perte que les explications qui entouraient cette conjecture dans le séminaire oral aient été écartées du volume publié, avec l'ensemble de l'exposé de clôture qui les contenait. C'est pourquoi il écrit (p. 639) :

≪ Je prends cette occasion pour expliciter ici quelle avait été la conjecture que j'avais énoncée dans le séminaire dans le cadre schématique, en y signalant sûrement la variante évidente dans le cadre analytique complexe (voire rigide-analytique). Je la concevais comme un théorème du type ≪ Riemann-Roch ≫, mais à coefficients discrets au lieu que ce soit à coefficients cohérents. ≫

Puis il développe techniquement sur cinq pages (p. 639-644) les grandes lignes d'une théorie de ≪ Riemann-Roch à coefficients discrets ≫ qu'il avait imaginée et dont il constate qu'elle n'a pas de trace publiée.

On comprend que ce thème est particulièrement important pour lui du fait qu'il s'agit d'une nouvelle manifestation du lien entre les ≪ coefficients continus ≫ et les ≪ coefficients discrets ≫.

Le formalisme des six opérations encore à compléter pour la cohomologie cristalline et pour les motifs :

Grothendieck rappelle (p. 1233) que, s'inspirant des idées de Monsky-Washnitzer, il avait dégagé en 1968 une définition générale pour une ≪ cohomologie p-adique ≫, qu'il avait appelée ≪ cohomologie cristalline ≫.

Il précise (p. 1233-34) :

≪ Les deux idées nouvelles (par rapport à Monsky et Washnitzer) qui m'ont conduit à cette théorie, sont celle de cristal (de modules, etc.) liée à une idée de ≪ croissance ≫ au-dessus d'≪ épaississements ≫ (infinitésimaux notamment) d'un schéma de départ, et d'autre part l'introduction d'une structure de puissances divisées dans les idéaux d'augmentation des épaississements envisagés, de façon à assurer la validité d'un ≪ lemme de Poincaré formel ≫ (à puissances divisées). Grâce à ces deux ingrédients, la cohomologie de De Rham d'un schéma lisse sur k s'interprète comme la cohomologie ≪ ordinaire ≫, à coefficients dans le faisceau structural d'anneaux d'un ≪ site cristallin ≫ convenable. ≫

Il précise encore (p. 1234) que la thèse de Berthelot, prenant comme point de départ ses idées, a établi ≪ un formalisme de dualité pour des variétés propres et lisses, suffisamment riche tout au moins pour écrire une expression cohomologique cristalline pour la fonction L ordinaire d'une telle variété sur un corps fini. ≫.

Il ajoute cependant :

≪ On est loin, aujourd'hui encore, d'une maîtrise comparable à celle que nous avons en cohomologie ℓ-adique, qui s'exprimerait par un formalisme des ≪ six opérations ≫ pour des ≪ coefficients cristallins ≫ généraux. Ceux-ci (selon ce que m'en a dit Deligne dernièrement) n'ont pas été seulement définis encore à l'heure actuelle, pas plus d'ailleurs que les bons ≪ coefficients de Hodge ≫ (au-dessus de variétés algébriques complexes) ! ≫

Il s'étonne de ce qu'il perçoit comme de la lenteur, dans le développement progressif d'un formalisme des six opérations pour la cohomologie cristalline (p. 672) :

≪ C'est une chose remarquable que plus de quinze ans après l'introduction par moi des idées de démarrage de la cohomologie cristalline, et plus de dix ans après la thèse de Berthelot qui établissait que la théorie était bien ≪ la bonne ≫ pour des schémas propres et lisses, on ne soit toujours pas parvenu à ce que j'appelle une situation de ≪ maîtrise ≫ de la cohomologie cristalline, comparable à celle développée pour la cohomologie étale dans le séminaire SGA 4 et 5. Par ≪ maîtrise ≫ (au premier degré) d'un formalisme cohomologique incluant des phénomènes de dualité, j'entends ni plus, ni moins que la pleine possession d'un formalisme des six opérations. ≫

Il soupçonne que cette lenteur s'explique moins par la difficulté technique du sujet que par le manque d'intérêt de ses anciens élèves pour le formalisme des six opérations (p. 673) :

≪ Je ne serais pas étonné que la raison principale pour cette stagnation relative soit dans la désaffection de Berthelot et d'autres pour l'idée même de ce formalisme, qui leur fait négliger (tout comme le fait Deligne pour sa théorie de Hodge, restée à l'état d'enfance) le premier ≪ palier ≫ essentiel à atteindre pour disposer d'un formalisme cohomologique pleinement ≪ adulte ≫. ≫

Il est même porté à croire que le développement d'une théorie générale des motifs et de leur dualité exprimée sous forme d'un formalisme complet des six opérations serait à portée de ≪ quelqu'un qui s'y investirait tout entier ≫ (p. 1664) :

≪ J'ai compris depuis quelques jours qu'une construction en forme d'une théorie des motifs, avec toute l'ampleur que je lui voyais il y a vingt ans, n'est nullement aussi loin ≪ à l'horizon ≫ qu'il m'avait semblé. Il se pourrait même qu'une théorie ≪ pleinement adulte ≫, avec le formalisme des six opérations (plus la bidualité), soit une question de quelques années de travail seulement, pour quelqu'un qui s'y investirait tout entier (sans dégrader son énergie créatrice par des dispositions fossoyantes). ≫

La formule de Lefschez-Verdier et les autres contributions de Verdier au formalisme de dualité :

Grothendieck précise quelles sont les véritables contributions de Verdier au formalisme de dualité (p. 590) :

≪ Ses contributions au formalisme de dualité se placent plus tard, une fois qu'avec Artin j'avais développé de façon détaillée le formalisme de la dualité étale dans SGA 4 (1963/64), quand je lui ai suggéré (en marge de son travail de fondements des catégories dérivées) de développer ce même formalisme dans le cadre des espaces topologiques ordinaires et des morphismes lissifiables de tels espaces. ≫

En effet, il écrit (p. 592) ≪ qu'entre 1964 et 1967 Verdier avait apporté quelques contributions intéressantes au formalisme de dualité ≫ et il dresse (p. 595) la liste de ces contributions :

≪ 1) Fondements d'un formalisme de dualité dans le contexte des espaces localement compacts et 2) celui des modules galoisiens (en collaboration avec

J. Tate) ; 3) la formule des points fixes dite de Lefschetz-Verdier ; 4) dualité dans les espaces localement compacts. »

Il commente :

« Les contributions 2) et 3) constituent un imprévu par rapport à ce qui était connu.

La contribution la plus importante me semble 3). Sa démonstration résulte facilement du formalisme de dualité (tant pour les coefficients discrets que continus), ce qui n'empêche qu'elle constitue un ingrédient important dans l'arsenal des formules passe-partout dont nous disposons en cohomologie. L'existence de cette formule a été découverte par Verdier, et a été pour moi une (agréable !) surprise.

Le formalisme de dualité dans le contexte des espaces localement compacts est pour l'essentiel l'adaptation qui s'imposait de ce que j'avais fait dans le contexte de la cohomologie étale des schémas (et sans les difficultés inhérentes à cette situation où tout était encore à faire). Il y apporte pourtant une idée intéressante, celle de la construction directe du foncteur $Rf^!$ (sans lissification préalable de f) comme adjoint à droite de $Rf_!$, avec un théorème d'existence à la clef. Ce procédé a été repris par Deligne en cohomologie étale, lui permettant de définir $Rf^!$ dans ce cadre, sans hypothèse de lissification. »

Ces contributions à la dualité auraient pu « constituer à elles seules une thèse de doctorat raisonnable », estime-t-il (p. 592).

Il attache en particulier une grande importance à la formule de Lefschetz-Verdier (p. 1284-1285) :

« Cette formule est un exemple frappant d'un énoncé qui est profond, et dont la démonstration est « triviale ». Quand Verdier m'a dit qu'il avait dégagé et prouvé une formule de Lefschetz pour des « correspondances cohomologiques » (qui n'avaient pas même été définies encore jusque-là) sur des variétés algébriques quelconques (« propres », quand même) et pour des « coefficients » constructibles quelconques, j'étais d'abord incrédule. »

Grothendieck précise (p. 1303) que cette formule de Lefschetz-Verdier « était établie sous l'hypothèse qu'on dispose d'un formalisme de dualité (« six opérations » et « théorème de bidualité ») » et « bel et bien prouvée sous cette forme en 1964 par Verdier ». Cependant, « la validité du théorème de bidualité en caractéristique $p > 0$ restait conjecturale », avant d'être établie par Deligne dans le chapitre « Finitude » de SGA 4 1/2. « Quant aux termes locaux de la formule de Lefschetz-Verdier, ils étaient « calculés » ni plus, ni moins, que dans la formule de Lefschetz ordinaire à points fixes isolés non nécessairement « transversaux », et généralisaient les classiques « multiplicités d'intersection » qui figurent dans cette dernière. »

Il souligne toutefois une différence entre les contributions de Verdier à la dualité et une caractéristique des travaux qu'il proposait (p. 592) :

« Une telle thèse pourtant n'aurait nullement été dans le style des travaux que j'ai coutume de proposer, lesquels consistent tous dans le développement systématique et jusqu'au bout d'une théorie dont je sens le besoin et l'urgence. »

Deux directions pour poursuivre après Verdier le développement systématique de la dualité des espaces localement compacts :

Il précise (p. 596) que manque encore ≪ le développement détaillé du formalisme de dualité dans le contexte des espaces localement compacts, dans l'esprit du formalisme passe-partout des six opérations et des catégories dérivées, dont l'exposé de Verdier au séminaire Bourbaki constituerait un embryon ≫.

Il croit savoir que, ≪ même dans le contexte des seules variétés topologiques ≫, il n'existe toujours pas un ≪ texte de référence satisfaisant pour le formalisme de la dualité de Poincaré ≫.

Il distingue d'ailleurs (p. 596-597) ≪ deux directions ≫ à suivre pour ≪ aller jusqu'au bout du travail que Verdier avait amorcé ≫ :

Un premier pas serait de se placer dans un ≪ contexte plus satisfaisant ≫ que celui des espaces localement compacts choisi par Verdier, ≪ savoir celui où les espaces topologiques (voire topos ?) sont (plus ou moins ?) quelconques, et où les applications $f : X \to Y$ sont soumises à la restriction d'être 1) séparées et 2) localement compactifiables ≫.

Un autre pas ≪ serait celui où on admettrait que X et Y, au lieu d'être des espaces topologiques, soient des multiplicités topologiques (i.e. des topos qui sont localement comme un espace topologique), voire même des topos quelconques, en restreignant les applications de façon convenable (à expliciter), de façon à trouver des fibres qui soient des multiplicités localement compactes, soumises au besoin à des conditions supplémentaires ≫.

Il note : ≪ Le cas d'un espace classifiant d'un groupe fini semble montrer qu'on ne peut guère espérer avoir un théorème de dualité (globale absolue) que modulo torsion, plus précisément en travaillant avec un anneau de coefficients qui est une $\mathbb{Q}$-algèbre. A cette restriction près, je ne serais pas étonné que la dualité de Poincaré (style ≪ six opérations ≫) marche telle quelle dans ce contexte. ≫

Il ne s'étonne pas que personne n'ait exploré cette direction, ≪ vu le boycott général sur la notion même de multiplicité, instauré par ses élèves cohomologistes, Deligne et Verdier en tête ≫.

La question du cadre topossique du formalisme des six opérations :

Elargissant encore le cadre (p. 598), il pose la question du cadre topossique maximal dans lequel le formalisme des six opérations pourrait être développé.

En effet, parmi les six opérations, le produit tensoriel dérivé $\overset{L}{\otimes}$ et son adjoint à droite $R\mathcal{H}om$ sont définis sur tout topos muni d'un Anneau commutatif, tandis que la paire de foncteurs dérivés adjoints Lf^* et Rf_* est bien définie pour tout morphisme f de topos annelés.

En revanche, les foncteurs adjoints $Rf_!$ et $Rf^!$ ne peuvent être définis que dans un cadre moins général qui reste à déterminer.

C'est pourquoi il écrit (p. 598) :

≪ Pour tout dire, il manque une réflexion de fondements du type suivant : décrire (si faire se peut) dans le contexte des topos quelconques et des faisceaux de coefficients discrets, des notions de ≪ propreté ≫, de ≪ lissité ≫, de ≪ propreté locale ≫, de ≪ séparation ≫ pour un morphisme de topos, permettant de dégager une notion de ≪ morphisme admissible ≫ de topos $f : X \to Y$, pour lequel les deux opérations $Rf_!$ et $Rf^!$ aient un sens (l'une adjointe de l'autre) de façon à obtenir les propriétés habituelles du formalisme des six opérations. ≫

Ici les topos sont considérés comme non annelés, ou peut-être comme munis d'Anneaux (qui sont supposés au besoin constants ou localement constants), en supposant (dans un premier temps au moins) que les morphismes de topos annelés $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ sont tels que $f^{-1}(\mathcal{B}) \to \mathcal{A}$ soit un isomorphisme.

Grothendieck mentionne (p. 598) que le souvenir de l'≪ amorce dans ce sens, due à Tate et Verdier, dans le contexte des groupes discrets ou profinis ≫ l'avait ≪ encouragé à poursuivre une réflexion dans ce sens ≫ l'année précédente, ≪ dans le contexte des petites catégories (généralisant les groupes discrets) servant de modèles homotopiques ≫.

Cette réflexion avait suffi à le ≪ convaincre qu'il doit exister un formalisme complet des six opérations dans le contexte Cat de la catégorie des petites catégories ≫.

Il ajoute (p. 598-599) que ≪ le développement d'une telle théorie ≫ dans ce contexte Cat, ou celui ≪ des espaces et multiplicités topologiques ou schématiques ≫, aurait pour lui ≪ comme principal intérêt d'être un pas vers une meilleure compréhension de la dualité discrète dans le contexte des topos généraux ≫.

Il propose (p. 599-600) d'élargir encore le cadre au-delà de la dualité discrète en considérant un morphisme de topos annelés $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ dont la composante $f^{-1}(\mathcal{B}) \to \mathcal{A}$ n'est plus nécessairement un isomorphisme :

≪ Quand on abandonne cette dernière hypothèse, on doit entrer dans une théorie (jamais explicitée à ma connaissance) qui mélange la dualité spatiale discrète et la dualité cohérente (relative aux Anneaux de coefficients et leurs homomorphismes). Du coup, on envisage de remplacer, sur les schémas (ou des topos plus généraux) X, Y, les Anneaux de coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ par des schémas relatifs (pas nécessairement affines) X', Y' sur X, Y, et les morphismes de topos annelés $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ par des diagrammes commutatifs du type

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

avec un formalisme ≪ six opérations ≫ dans un contexte de ce type. Quand X, Y sont les topos ponctuels, on devrait retrouver la dualité cohérente habituelle. ≫

Il se souvient d'ailleurs (p. 599) qu'Illusie lui avait fait entendre l'année précédente ≪ qu'il s'était battu avec des perplexités de dualité dans le cas d'espaces (ou schémas) semi-simpliciaux ≫.

Il commente : ≪ Cela m'avait bien l'air d'être toujours le même tabac – arriver à déceler l'existence d'un formalisme des six opérations dans un cas d'espèce, et le comprendre. ≫

En définitive, il semble penser que le formalisme des six opérations devrait pouvoir être développé dans le cadre général des topos, de façon que les divers cas connus s'obtiennent par application d'une telle théorie générale aux cas particuliers.

Il écrit en effet (p.185) qu'il serait ≪ opportun de dégager un cadre topossique commun (dans la mesure du possible) pour les cas connus où on dispose d'un formalisme de dualité dit des six opérations ≫.

L'approfondissement du lien entre coefficients discrets et continus par la théorie des $\mathcal{D}$-modules et les travaux de Mebkhout :

Grothendieck parle enfin (p. 418) de ≪ ce qui manquait encore ≫ dans sa ≪ vision du formalisme cohomologique des espaces ≫ : ≪ une compréhension du lien qu'on devinait entre coefficients discrets et coefficients continus, au-delà du cas familier des systèmes locaux et de leur interprétation en termes de modules à connexion intégrable, ou de cristaux de modules ≫.

En fait, il s'était demandé (p. 1393) ≪ si sur un espace analytique complexe X, la dualité cohérente (par exemple sous la forme de Serre, si X est lisse et pour des coefficients localement libres) ne pouvait pas être obtenue comme ≪ cas particulier ≫ de la dualité discrète, développée par Verdier sur le modèle de la théorie étale ≫.

Il note avec enthousiasme (p. 418) que ≪ ce lien a été découvert et établi (près de vingt ans plus tard) par Zoghman Mebkhout, en termes de catégories dérivées formées d'une part à l'aide de coefficients discrets constructibles, d'autre part à l'aide de la notion de $\mathcal{D}$-Module ou de complexe d'opérateurs différentiels ≫. C'est la ≪ correspondance de Riemann-Hilbert ≫.

Il comprend (p. 1393) que Mebkhout a montré ≪ qu'il y a bel et bien un lien profond entre les deux dualités, mais que celui-ci ne s'exprime pas en disant que l'une ≪ coiffe ≫ l'autre, mais en trouvant une troisième théorie de dualité, celle des $\mathcal{D}$-Modules (ou ≪ cristaux ≫ sur X), qui coiffe l'une et l'autre, et en se limitant, de plus, du côté ≪ discret ≫, aux complexes de $\mathbb{C}$-vectoriels qui sont à faisceaux de cohomologie analytiquement constructibles. ≫

Il cite (p. 415) une lettre que lui a adressée Mebkhout et dans laquelle celui-ci présente la correspondance de Riemann-Hilbert comme une suite naturelle du lien entre coefficients discrets et coefficients continus apparu avec le formalisme des six opérations :

≪ C'est ton formalisme de dualité qui conduit naturellement à ce résultat ≫, lui écrit Mebkhout.

Lui-même commente (p. 1360) le rôle fécond joué par l'ubiquité du formalisme de dualité :

≪ Un fil conducteur, qui progressivement prend une place croissante dans ses réflexions, est le parallélisme frappant entre dualité continue et dualité discrète. ≫

Sur le foncteur qui va de la catégorie triangulée des complexes de $\mathcal{D}$-Modules holonomes à singularités régulières vers celle des complexes constructibles à coefficients discrets, il explique (p. 1163) que ≪ le théorème de constructibilité de Kashiwara permet à Mebkhout de définir le foncteur allant d'une catégorie triangulée de coefficients ≪ continus ≫ (complexes d'opérateurs différentiels) vers une autre formée de coefficients « discrets » (constructibles) » et commente : « C'était là le « chaînon manquant » justement dans le formalisme de dualité que j'avais développé pendant une dizaine d'années (1956-66). »

Grothendieck fait remarquer au passage que ces constructions et résultats n'auraient pu être dégagés sans les catégories dérivées (p. 1371) :

« Plus encore que pour les autres résultats de Mebkhout, et tout comme dans mes travaux développant le formalisme de bidualité et des six opérations, le langage des catégories dérivées est ici essentiel pour dégager la relation simple et profonde entre coefficients discrets et coefficients cohérents. »

A cette correspondance formulée comme une équivalence de catégories dérivées « entre coefficients discrets constructibles et coefficients cristallins (satisfaisant à certaines conditions d'holonomie et de régularité) » s'ajoutent dans les travaux de Mebkhout deux autres théorèmes « s'exprimant en termes de catégories dérivées » : le « théorème de dualité globale cristallin » et le « théorème de bidualité pour les $\mathcal{D}$-modules » (p. 418).

Il ajoute (p. 572) avoir d'abord pensé naïvement que « la théorie des $\mathcal{D}$-Modules était désormais chose faite et close, comme l'est disons la dualité cohérente ». Puis, rencontrant Mebkhout, il s'est « rendu compte que dans la théorie même qu'il avait démarrée, les grandes tâches ne manquent pas » et que « certaines n'ont pas même été entamées, faute d'avoir seulement été vues ».

Une réécriture de ce qui aurait dû être publié et ne l'avait pas été :

Comme ses exposés généraux du séminaire oral SGA 5 présentant le formalisme des six opérations et ses multiples réalisations concrètes dans divers contextes classiques discrets et continus n'ont pas été rédigés et inclus dans le volume publié, il envisage (p. 186) d'ajouter à « Récoltes et Semailles » une « esquisse d'un formulaire des six variances rassemblant les traits communs à un formalisme de dualité (inspiré de la dualité de Poincaré et de celle de Serre) » qu'il avait « dégagé entre 1956 et 1963, formulaire qui s'est avéré avoir un caractère universel pour toutes les situations de dualité cohomologique rencontrées à ce jour. »

A la fin de « Récoltes et Semailles », il cite son formalisme de dualité comme troisième dans une liste de six « chantiers » « désolés », « délabrés » ou « abandonnées » (qui sont : 1. Topos. 2. Langage cohomologique. 3. Six opérations, bidualité. 4. « Problème des coefficients ». 5. Motifs. 6. Conjectures standard.).

Il écrit au sujet de ce troisième chantier (p. 1671) :

« Il s'agit du point de vue que j'ai introduit dans le formalisme de dualité à la Poincaré ou à la Serre, à coefficients discrets ou continus. Le nom « six opérations » que j'avais introduit a été soigneusement éradiqué par mes élèves cohomologistes. Ils se bornent à utiliser ici ou là celles qui leur conviennent, tout en larguant aux profits et pertes la structure qu'elles forment dans leur ensemble (avec le formalisme de bidualité), et surtout le fil conducteur irremplaçable que fournit le point de vue (notamment pour dégager de bonnes « catégories de coefficients » []). Depuis plus de vingt ans que ce formalisme existe et a fait ses preuves, personne parmi ceux qui étaient « dans le coup » n'a pris la peine (si ce n'est dans des papiers destinés à rester secrets et dont je n'ai pas connaissance) de dégager le « formulaire » algébrique commun aux nombreuses situations où on dispose d'une telle dualité « passe-partout » s'exprimant en un formalisme de six opérations. »

Il commente en note :

« Dans un des premiers exposés de SGA 5, j'avais pris grand soin d'expliciter en long et en large ce formulaire, qui allait être comme le nerf-moteur de tout le séminaire à venir. Cet exposé, le plus crucial de tous dans SGA 5, a disparu de l'édition-massacre. Il n'y a trace d'une allusion à son existence dans tout le volume ! »

Puis il poursuit en qualifiant l'état de ce chantier (p. 1671-1672) :

« On voit qu'il s'agit ici, non pas à strictement parler d'un « chantier à l'abandon » (vu que le travail de formalisation à fournir est ici dérisoire), mais plutôt d'un point de vue fécond systématiquement éludé (comme l'a été celui des topos). Cet abandon a été pour beaucoup sûrement dans l'état de lamentable stagnation que je constate (à quelques exceptions près) sur le thème de la cohomologie des variétés algébriques, en comparaison surtout au vigoureux essor que je lui avais donné entre 1955 et 1970.

Comme je l'ai déjà annoncé dans l'introduction [], à la suite de « Récoltes et Semailles » je compte inclure une courte esquisse des traits essentiels du formalisme des « six opérations ». Grâce aux soins de mes élèves, son existence même est aujourd'hui inconnue à tous, à la seule exception de ceux qui ont été directement associés à l'un ou l'autre des deux séminaires SGA 4 (1963/64) et SGA 5 (1965/66) et qui visiblement l'ont oublié. Ainsi aurai-je fait ce qui est en mon pouvoir, pour remettre à l'honneur (s'il se trouve ouvriers à l'affût de tels outils) un outil d'une efficacité parfaite, et un point de vue fécond qui, dans le thème cohomologique, nous conduit constamment droit vers les problèmes cruciaux. »

Finalement, c'est dans le corps même de « Récoltes et Semailles » que, comme le montrent les citations ici rassemblées et ordonnées, Grothendieck a développé au fil des pages une présentation générale de sa théorie de la dualité cohomologique, c'est-à-dire du formalisme des six opérations, de ses manifestations dans une multitude de contextes et avec divers coefficients continus ou discrets, qui illustrent son caractère d'ubiquité, et des thèmes les plus importants dont il rend possible le déploiement.