

Factorisations, induction et compositions de précribles couvrants sur des catégories “ localement calculables”

par Laurent LAFFORGUE

Centre Lagrange, Huawei Technologies France

Juin 2026

Les catégories que nous appelons “localement calculables”

Définition. –

Nous appelons “catégories localement calculables”
les catégories syntactiques cartésiennes C_Σ
des théories sans symboles de fonction et sans axiomes,
c'est-à-dire réduites à un vocabulaire Σ consistant en

- un ensemble de “noms d'objets” ou “sortes”,
- un ensemble de “symboles de relations” notés
$$R \mapsto A_1 \cdots A_n$$
en une suite finie de sortes $A_1, \dots, A_n$.

Remarque:

On appelle ces catégories “localement calculables” car

- leurs objets sont indexés par des données combinatoires finies d'un type explicite déterminé par le vocabulaire Σ ,
- les morphismes entre deux objets forment un ensemble fini toujours calculable,
- le composé de deux morphismes est toujours facilement calculable,
- les produits finis et les produits fibrés sont bien définis et facilement calculables.

Les objets libres des catégories localement calculables

Définition. – Dans la catégorie syntactique cartésienne $\mathcal{C}_\Sigma$
d'un vocabulaire Σ réduit à des "sortes" et des "symboles de relation",
nous appelons "objets libres"

- des objets indexés par les sortes A de Σ ,
qui consistent en des "formules du vrai"
$$\top(x^A)$$

en une variable x^A à valeur dans la sorte A ,
- les produits finis de ces objets,
indexés par un ensemble fini $\mathcal{A}$ de sortes de Σ
et par des multiplicités $m_A \geq 1, A \in \mathcal{A}$,
qui consistent en les "formules du vrai"
$$\top((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A})$$

en des variables $x_i^A, A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A$,
à valeurs dans les sortes $A \in \mathcal{A}$.

Remarque: En particulier, si $\mathcal{A}$ est vide, il définit l'objet terminal de $\mathcal{C}_\Sigma$.

Les objets liés des catégories localement calculables

Définition. – Dans la catégorie syntactique cartésienne $\mathcal{C}_\Sigma$
d'un vocabulaire Σ réduit à des "sortes" et des "symboles de relation",
nous appelons "objets liés" les sous-objets d'objets libres

$$\top ((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A})$$

qui sont

- les sous-objets "atomiques"
$$R(x_{\alpha(1)}^{A_1}, \dots, x_{\alpha(n_R)}^{A_{n_R}})$$

indexés par les couples (R, α) constitués de
 - un symbole de relation $R \mapsto A_1 \cdots A_{n_R}$
tel que $A_i \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq n_R,$
 - une famille d'indices
 $\alpha(i) \in \{1, 2, \dots, m_{A_i}\}, \quad 1 \leq i \leq n_R$
- les intersections finies de tels sous-objets atomiques,
indexées par les ensembles finis non vides $\mathcal{R}$ de tels couples $(R, \alpha),$

Remarque: Les seuls objets de la catégorie syntactique cartésienne $\mathcal{C}_\Sigma$
sont les "objets libres" et les "objets liés".

Les morphismes entre objets libres

Définition. – Dans la catégorie syntactique cartésienne C_Σ

d'un vocabulaire Σ réduit à des sortes et des symboles de relation,

un morphisme d'un objet libre

$$\top \left((x_A^i)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A} \right)$$

associé à un ensemble fini $\mathcal{A}$ de sortes et des multiplicités $m_A \geq 1, A \in \mathcal{A}$,

dans un objet libre

$$\top \left((y_A^i)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m'_A} \right)$$

associé à un ensemble fini $\mathcal{A}'$ de sortes et des multiplicités $m'_A \geq 1, A \in \mathcal{A}'$,

est défini par des formules

$$y_A^i = x_A^{f_A(i)}, \quad A \in \mathcal{A}', \quad 1 \leq i \leq m'_A, \quad f_A(i) \in \{1, \dots, m_A\}.$$

Remarque:

L'ensemble de ces morphismes ne peut être non vide que si $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$.

Si cette condition est satisfaite,

les morphismes sont indexés par l'ensemble fini

des familles d'applications

$$f_A : \{1, \dots, m'_A\} \longrightarrow \{1, \dots, m_A\}, \quad A \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}.$$

Les morphismes d'un objet lié dans un objet libre

Définition. – Un morphisme d'un objet lié

$$\bigwedge_{(R, \alpha) \in \mathcal{R}} R \left(x_{\alpha(1)}^{A_1}, \dots, x_{\alpha(n_R)}^{A_{n_R}} \right) \subseteq \top \left((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A} \right)$$

indexé par

- un ensemble fini $\mathcal{A}$ de sortes A de Σ ,
- des multiplicités $m_A \geq 1, A \in \mathcal{A}$,
- un ensemble fini de couples (R, α) constitués de
 - un symbole de relation $R \mapsto A_1 \cdots A_{n_R}$ de Σ
 - tel que $A_i \in \mathcal{A}, \quad 1 \leq i \leq n_R,$
 - une famille α d'indices
 - $\alpha(i) \in \{1, 2, \dots, m_{A_i}\}, \quad 1 \leq i \leq n_R,$

dans un objet libre

$$\top \left((y_i^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m'_A} \right)$$

indexé par un ensemble fini $\mathcal{A}'$ de sortes et des multiplicités $m'_A, A \in \mathcal{A}'$,
est un morphisme entre les objets libres

$$\top \left((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A} \right) \longrightarrow \top \left((y_i^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m'_A} \right),$$

donc défini par des formules $y_i^A = x_{f_A(i)}^A, A \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m'_A, 1 \leq f_A(i) \leq m_A.$

Les morphismes d'un objet lié dans un objet lié

Définition. – Un morphisme d'un objet lié

$$\bigwedge_{(R, \alpha) \in \mathcal{R}} R \left(x_{\alpha(1)}^{A_1}, \dots, x_{\alpha(n_R)}^{A_{n_R}} \right) \subseteq \top \left((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A} \right)$$

dans un objet lié

$$\bigwedge_{(R, \beta) \in \mathcal{R}'} R \left(y_{\beta(1)}^{A_1}, \dots, y_{\beta(n_R)}^{A_{n_R}} \right) \subseteq \top \left((y_i^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m'_A} \right)$$

est un morphisme entre les objets libres ambiants

$$\top \left((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A} \right) \longrightarrow \top \left((y_i^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m'_A} \right)$$

nécessairement défini par des formules

$$y_i^A = x_{f_A(i)}^A, \quad A \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}, \quad 1 \leq i \leq m'_A, \quad 1 \leq f_A(i) \leq m_A,$$

telles que, pour tout couple

$$\left(R \rightharpoonup A_1 \cdots A_{n_R}, \quad \beta = (\beta(i) \in \{1, \dots, m'_{A_i}\})_{1 \leq i \leq n_R} \right) \in \mathcal{R}'$$

le couple

$$(R \rightharpoonup A_1 \cdots A_{n_R}, \quad \alpha = (\alpha(i) \in \{1, \dots, m_{A_i}\})_{1 \leq i \leq n_R})$$

défini par

$$\alpha(i) = f_{A_i}(\beta(i)), \quad 1 \leq i \leq n_R,$$

est élément de $\mathcal{R}$.

La composition des morphismes

Définition. – Le composé de deux morphismes

$$\begin{array}{ccc}
 \bigwedge_{(R, \alpha) \in \mathcal{R}} R(x_{\alpha(1)}^{A_1}, \dots, x_{\alpha(n_R)}^{A_{n_R}}) \hookrightarrow \top((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A}) & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigwedge_{(R, \beta) \in \mathcal{R}'} R(y_{\beta(1)}^{A_1}, \dots, y_{\beta(n_R)}^{A_{n_R}}) \hookrightarrow \top((y_i^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m_{A'}}) & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigwedge_{(R, \gamma) \in \mathcal{R}''} R(z_{\gamma(1)}^{A_1}, \dots, z_{\gamma(n_R)}^{A_{n_R}}) \hookrightarrow \top((z_i^A)_{A \in \mathcal{A}'', 1 \leq i \leq m_{A''}}) & &
 \end{array}$$

définis par des formules

$$y_i^A = x_{f_A(i)}^A, \quad A \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}, \quad 1 \leq i \leq m_{A'}, \quad 1 \leq f_A(i) \leq m_A,$$

et

$$z_i^A = x_{g_A(i)}^A, \quad A \in \mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}', \quad 1 \leq i \leq m_{A''}, \quad 1 \leq g_A(i) \leq m_{A'}$$

est le morphisme défini par les formules

$$z_i^A = x_{f_A \circ g_A(i)}^A, \quad A \in \mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}, \quad 1 \leq i \leq m_{A''}, \quad 1 \leq f_A \circ g_A(i) \leq m_A.$$

Les produits finis d'objets

Lemme. –

(i) Le produit de deux objets libres

et

est l'objet libre

$$\top \left((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A} \right)$$

$$\top \left((y_i^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m'_A} \right)$$

$$\top \left((z_i^A)_{A \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m_A + m'_A} \right)$$

(avec $m_A = 0$ si $A \in \mathcal{A}' - \mathcal{A}$ et $m'_A = 0$ si $A \in \mathcal{A} - \mathcal{A}'$)

muni des projections définies par les équations

$$x_i^A = z_i^A, \quad A \in \mathcal{A}, \quad 1 \leq i \leq m_A,$$

et

$$y_i^A = z_{m_A + i}^A, \quad A \in \mathcal{A}', \quad 1 \leq i \leq m'_A.$$

(ii) Le produit de deux sous-objets

$$\bigwedge_{(R, \alpha) \in \mathcal{R}} R \left(x_{\alpha(1)}^{A_1}, \dots, x_{\alpha(n_R)}^{A_{n_R}} \right) \hookrightarrow \top \left((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A} \right)$$

et

$$\bigwedge_{(R, \beta) \in \mathcal{R}'} R \left(y_{\beta(1)}^{A_1}, \dots, y_{\beta(n_R)}^{A_{n_R}} \right) \hookrightarrow \top \left((y_i^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m'_A} \right)$$

est le sous-objet

$$\bigwedge_{(R, \gamma) \in \mathcal{R}''} R \left(z_{\gamma(1)}^{A_1}, \dots, z_{\gamma(n_R)}^{A_{n_R}} \right) \hookrightarrow \top \left((z_i^A)_{A \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m_A + m'_A} \right)$$

où $\mathcal{R}''$ est la réunion disjointe de $\mathcal{R}$ et de l'ensemble des

$$\left(R, \gamma = (\gamma(i) = m_{A_i} + \beta(i))_{1 \leq i \leq n_R} \right) \quad \text{pour } (R, \beta) \in \mathcal{R}'.$$

Les produits fibrés d'objets libres

D'après le lemme précédent, on est ramené au calcul de l'égalisateur de deux morphismes entre deux objets libres.

Proposition. – Considérons deux morphismes entre deux objets libres

$$\top \left((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A} \right) \Rightarrow \top \left((y_i^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m'_A} \right)$$

définis par des équations

$$y_i^A = x_{f_A(i)}^A, \quad A \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}, \quad 1 \leq i \leq m'_A, \quad 1 \leq f_A(i) \leq m_A,$$

et

$$y_i^A = x_{g_A(i)}^A, \quad A \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}, \quad 1 \leq i \leq m'_A, \quad 1 \leq g_A(i) \leq m_A.$$

Alors leur égalisateur est l'objet libre

$$\top \left((x_i^A)_{A \in \mathcal{A} - \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m_A}; (x_j'^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq j \leq m'_A} \right)$$

où, pour tout $A \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$,

- les $j \in \{1, \dots, m'_A\}$ sont des indices pour les classes d'équivalence
$$C_j \subseteq \{1, 2, \dots, m_A\}$$

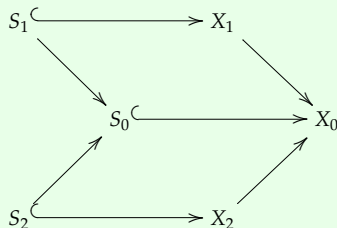
pour la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par la relation

$$i_1 \sim i_2 \quad \text{s'il existe } i \in \{1, \dots, m'_A\} \text{ tel que } i_1 = f_A(i), i_2 = g_A(i),$$
- on a posé les équations
$$x_i^A = x_j'^A \quad \text{pour tous } A \in \mathcal{A}', i \in C_j \subseteq \{1, \dots, m_A\}.$$

Les produits fibrés d'objets

Lemme de réduction. –

Dans la catégorie $\mathcal{C}_\Sigma$, considérons deux morphismes
entre des sous-objets liés et leurs prolongements entre
les objets libres ambiants:



Alors:

(i) Le produit fibré $S_1 \times_{S_0} S_2$
s'identifie au produit fibré $S_1 \times_{X_0} S_2$.

(ii) Il s'identifie encore à l'image réciproque du sous-objet
 $S_1 \times S_2 \hookrightarrow X_1 \times X_2$
dans l'égalisateur des deux morphismes entre objets libres
 $X_1 \times X_2 \rightrightarrows X_0$.

Images réciproques de sous-objets liés

Le calcul des produits fibrés dans $\mathcal{C}_\Sigma$ se ramène à :

Proposition. –

Considérons un morphisme entre objets libres

$$\top \left((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A} \right) \longrightarrow \top \left((y_i^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m'_A} \right)$$

définis par des formules

$$y_i^A = x_{f_A(i)}^A, \quad A \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}, \quad 1 \leq i \leq m'_A, \quad 1 \leq f_A(i) \leq m_A.$$

Alors l'image réciproque par ce morphisme d'un sous-objet

$$\bigwedge_{(R, \beta) \in \mathcal{R}'} R(y_{\beta(1)}^{A_1}, \dots, y_{\beta(n_R)}^{A_{n_R}}) \hookrightarrow \top \left((y_i^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m'_A} \right)$$

défini par un ensemble fini $\mathcal{R}'$ de couples

$$(R, \beta) = \left(R \mapsto A_1 \cdots A_{n_R}, \beta = (\beta(i) \in \{1, \dots, m'_{A_i}\})_{1 \leq i \leq n_R} \right)$$

est le sous-objet

$$\bigwedge_{(R, \alpha) \in \mathcal{R}} R(x_{\alpha(1)}^{A_1}, \dots, x_{\alpha(n_R)}^{A_{n_R}}) \hookrightarrow \top \left((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A} \right)$$

défini par l'ensemble fini $\mathcal{R}$ des couples de la forme

$$(R, \alpha) = \left(R \mapsto A_1 \cdots A_{n_R}, \alpha = (\alpha(i) = f_{A_i}(\beta(i)) \in \{1, \dots, m_{A_i}\})_{1 \leq i \leq n_R} \right)$$

pour $(R, \beta) \in \mathcal{R}'$.

Induction sur les morphismes et les précribles

Ainsi, tout morphisme de $\mathcal{C}_\Sigma$

permet d'induire à partir de tout morphisme

un morphisme

qui forme avec lui un carré commutatif cartésien :

$$\begin{array}{ccc} S' & \longrightarrow & S \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \\ & & \downarrow \\ & & S \\ & \nearrow & \downarrow \\ & & X' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & S' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array} \quad \square$$

Par conséquent, tout précrible de S

induit via $S' \rightarrow S$ un précrible de S'

$$(X_i \xrightarrow{x_i} S)_{i \in I}$$
$$(X'_i = X_i \times_S S' \longrightarrow S')_{i \in I}.$$

Factorisation de morphismes entre des objets libres

Proposition. –

Considérons deux morphismes entre des objets libres de $\mathcal{C}_\Sigma$

$$\top \left((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A} \right) = X \longrightarrow X_0 = \left((z_i^A)_{A \in \mathcal{A}_0, 1 \leq i \leq m_A^0} \right)$$

et

$$\top \left((y_i^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m'_A} \right) = X' \longrightarrow X_0,$$

définis par des formules

$$z_i^A = x_{f_A(i)}^A, \quad A \in \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}, \quad 1 \leq i \leq m_A^0, \quad 1 \leq f_A(i) \leq m_A,$$

et

$$z_i^A = y_{g_A(i)}^A, \quad A \in \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}', \quad 1 \leq i \leq m_A^0, \quad 1 \leq g_A(i) \leq m'_A.$$

Alors:

(i) Le morphisme $X \rightarrow X_0$ se factorise à travers $X' \rightarrow X_0$ si et seulement si

- on a $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, $g_A(i_1) = g_A(i_2) \Rightarrow f_A(i_1) = f_A(i_2)$.

(ii) Si cette condition est vérifiée, les factorisations possibles sont indexées par les familles d'applications

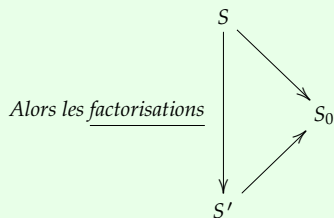
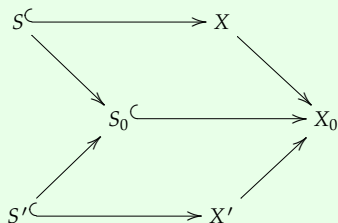
$$h_A : \{1, \dots, m'_A\} \longrightarrow \{1, \dots, m_A\}, \quad A \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A},$$

telles que, pour tout $A \in \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$,

$$f_A = h_A \circ g_A.$$

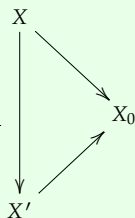
Le problème général de factorisation

Lemme de réduction. – Dans la catégorie $\mathcal{C}_\Sigma$, considérons deux morphismes entre des sous-objets liés et leurs prolongements entre les objets libres ambiants:



Alors les factorisations

sont les factorisations



qui envoient le sous-objet $S \hookrightarrow X$ dans le sous-objet $S' \hookrightarrow X'$.

Factorisation des morphismes entre objets liés

Considérons deux morphismes de $\mathcal{C}_\Sigma$

$$S = \bigwedge_{(R, \alpha) \in \mathcal{R}} R(x_{\alpha(1)}^{A_1}, \dots, x_{\alpha(n_R)}^{A_{n_R}}) \hookrightarrow \top((x_i^A)_{A \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq m_A}) = X$$

$$\searrow \quad \downarrow$$

$$\top((z_i^A)_{A \in \mathcal{A}_0, 1 \leq i \leq m_A^0}) = X_0$$

et

$$S' = \bigwedge_{(R, \beta) \in \mathcal{R}'} R(y_{\beta(1)}^{A_1}, \dots, y_{\beta(n_R)}^{A_{n_R}}) \hookrightarrow \top((y_i^A)_{A \in \mathcal{A}', 1 \leq i \leq m'_A}) = X'$$

$$\searrow \quad \downarrow$$

$$\top((z_i^A)_{A \in \mathcal{A}_0, 1 \leq i \leq m_A^0}) = X_0$$

définis par des formules

$$z_i^A = x_{f_A(i)}^A, \quad A \in \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}, \quad 1 \leq i \leq m_A^0, \quad 1 \leq f_A(i) \leq m_A,$$

et

$$z_i^A = x_{g_A(i)}^A, \quad A \in \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}', \quad 1 \leq i \leq m_A^0, \quad 1 \leq g_A(i) \leq m'_A.$$

Corollaire. – Pour que $S \rightarrow X \rightarrow X_0$ se factorise à travers $S' \rightarrow X' \rightarrow X_0$, il est nécessaire que

- $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, $g_A(i_1) = g_A(i_2) \Rightarrow f_A(i_1) = f_A(i_2)$.

Calcul de factorisation

Théorème. –

Dans les conditions ci-dessus, les factorisations de

$$S \hookrightarrow X \longrightarrow X_0$$

à travers

$$S' \hookrightarrow X' \longrightarrow X_0$$

sont indexées par les familles d'applications

$$h_A : \{1, \dots, m'_A\} \longrightarrow \{1, \dots, m_A\}, \quad A \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A},$$

telles que

- $f_A = h_A \circ g_A$ pour tout $A \in \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$,
- pour tout élément de $\mathcal{R}'$
 $(R, \beta) = (R \rightharpoonup A_1 \cdots A_{n_R}, \beta = (\beta(i) \in \{1, \dots, m'_{A_i}\})_{1 \leq i \leq n_R})$,
il existe un élément de $\mathcal{R}$ de même première composante R
 $(R, \alpha) = (R \rightharpoonup A_1 \cdots A_{n_R}, \alpha = (\alpha(i) \in \{1, \dots, m_{A_i}\})_{1 \leq i \leq n_R})$
vérifiant
$$\alpha(i) = h_{A_i}(\beta(i)), \quad \forall i \in \{1, \dots, n_R\}.$$

Conditions de factorisation

Corollaire. –

Dans les mêmes conditions, le morphisme

se factorise à travers le morphisme

$$S \hookrightarrow X \longrightarrow X_0$$

$$S' \hookrightarrow X' \longrightarrow X_0$$

si et seulement si

- on a $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$,

- pour tout $A \in \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, on a l'implication

$$g_A(i_1) = g_A(i_2) \Rightarrow f_A(i_1) = f_A(i_2), \quad \forall i_1, i_2 \in \{1, \dots, m_A^0\},$$

- on peut associer à tout élément (R, β) de $\mathcal{R}'$

un élément (R, α_β) de $\mathcal{R}$ de même première composante $R \mapsto A_1 \cdots A_{n_R}$

vérifiant les implications

$$\beta(i_1) = \beta(i_2) \Rightarrow \alpha_\beta(i_1) = \alpha_\beta(i_2) \quad \text{si} \quad A_{i_1} = A_{i_2}, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq n_R,$$

$$\beta(i_1) = g_A(i_2) \Rightarrow \alpha_\beta(i_1) = f_A(i_2) \quad \text{si} \quad A_{i_1} = A \in \mathcal{A}_0, \quad 1 \leq i_1 \leq n_R, \quad 1 \leq i_2 \leq m_A^0,$$

$$\beta(i_1) = \beta'(i_2) \Rightarrow \alpha_\beta(i_1) = \alpha_{\beta'}(i_2) \quad \text{si} \quad (R' \mapsto A'_1 \cdots A'_{n_{R'}}, \beta') \in \mathcal{R}',$$

$$1 \leq i_1 \leq n_R, \quad 1 \leq i_2 \leq n_{R'},$$

$$\text{et } A_{i_1} = A'_{i_2}.$$