

Les expressions des énoncés et des démonstrations mathématiques en termes d'assertions et de processus d'engendrement de topologies sur des catégories localement calculables

par Laurent LAFFORGUE

(Centre Lagrange, Huawei Technologies France)

Juin 2026

Calculabilité locale pour les langages relationnels

Proposition. – Considérons un langage Σ qui est “relationnel”, c’est-à-dire sans symboles de fonction, réduit à des sortes et des symboles de relation. Alors la catégorie syntactique cartésienne C_Σ^c de Σ est ainsi décrite :

(i) Ses objets sont indexés par les données combinatoires finies consistant en

- un ensemble fini $\mathcal{A}$ de sortes de Σ ,
- des multiplicités $m_A \geq 1, A \in \mathcal{A}$,
- un ensemble fini $\mathcal{R}$ de couples (R, α) constitués de
 - un symbole de relation $R \mapsto A_1 \cdots A_{n_R}$ de Σ ,
 - une suite finie $\alpha = (\alpha(i) \in \{1, 2, \dots, m_{A_i}\})_{1 \leq i \leq n_R}$.

(ii) Les morphismes d’un objet indexé par $(\mathcal{A}, m_\bullet, \mathcal{R})$
dans un objet indexé par $(\mathcal{A}', m'_\bullet, \mathcal{R}')$

sont indexés par les familles d’applications

$$f_A : \{1, \dots, m'_A\} \longrightarrow \{1, \dots, m_A\}, \quad A \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A},$$

telles que, pour tout couple $(R \mapsto A_1 \cdots A_n, \beta) \in \mathcal{R}'$,

le couple $(R \mapsto A_1 \cdots A_n, \alpha)$

défini par $\alpha(i) = f_{A_i}(\beta(i))$, $1 \leq i \leq n_R$, est élément de $\mathcal{R}$.

Conséquence : Une telle catégorie est localement calculable au sens que

- les ensembles de morphismes entre deux objets sont toujours finis et calculables,
- les produits finis et les produits fibrés sont calculables,
- le composé de deux morphismes est toujours facilement calculable.

Réduction de la logique géométrique aux langages relationnels

Définition. – Soit Σ un langage du premier ordre.

- (i) On note Σ^r le langage relationnel déduit de Σ en remplaçant
chaque symbole de fonction $f : A_1 \cdots A_n \rightarrow B$
par un symbole de relation $R_f \rightharpoonup A_1 \cdots A_n B$.
- (ii) On note $\mathbb{T}_\Sigma^r$ la théorie relationnelle de langage Σ^r
définie par les axiomes associés aux symboles de fonctions $f : A_1 \cdots A_n \rightarrow B$ de Σ

$$\begin{aligned} & \top(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}) \vdash (\exists x^B) R_f(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n} x^B), \\ & R_f(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n} x^B) \wedge R_f(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n} y_B) \vdash x_B = y_B. \end{aligned}$$

Définition. – A toute formule géométrique φ de Σ ,
on associe récurivement une formule géométrique φ^r de Σ^r
de la manière suivante :

- (i) On pose $\varphi = \varphi^r$ si la construction de φ ne fait pas apparaître le symbole de fonction,
en particulier si φ a la forme $R(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}), x^B = y^B, \top(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}), \perp(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})$.
- (ii) Si $\varphi = \bigvee_{i \in I} \varphi_i$, $\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ ou $\varphi(\vec{x}) = (\exists \vec{y}) \theta(\vec{x}, \vec{y})$,
on pose $\varphi^r = \bigvee_{i \in I} \varphi_i^r$, $\varphi = \varphi_1^r \wedge \cdots \wedge \varphi_n^r$ ou $\varphi^r(\vec{x}) = (\exists \vec{y}) \theta^r(\vec{x}, \vec{y})$.
- (iii) Si φ_1 est déduite de φ par une substitution de variables $y^B = f(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n})$,
on pose $\varphi_1^r = \varphi^r \wedge R_f(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n} y^B)$.

Présentation des topos par des catégories localement calculables

On rappelle :

Proposition. –

Pour tout topos $\mathcal{E}$, il existe des théories géométriques du premier ordre $\mathbb{T}$ qui sont “classifiées” par $\mathcal{E}$ au sens qu’existent des équivalences

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} .$$

On a d’autre part :

Proposition. –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de langage Σ définie par des axiomes

$$\varphi_i \vdash \psi_i, \quad i \in I.$$

Soit Σ^r le langage relationnel associé à Σ ,

et soit $\mathbb{T}_{\Sigma}^r$ la théorie géométrique de langage Σ^r associée à Σ .

Soit enfin $\mathbb{T}^r$ la théorie géométrique de langage Σ^r

qui est définie comme théorie quotient de $\mathbb{T}_{\Sigma}^r$ par les axiomes supplémentaires

$$\varphi_i^r \vdash \psi_i^r, \quad i \in I.$$

Alors :

- (i) *Les catégories syntactiques géométriques $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{T}^r}$ s’identifient avec leurs topologies canoniques $J_{\mathbb{T}}$ et $J_{\mathbb{T}^r}$.*
- (ii) *Les topos classifiants $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{E}_{\mathbb{T}^r}$ de $\mathbb{T}$ et $\mathbb{T}^r$ s’identifient.*
- (iii) *On a $\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong (\widehat{\mathcal{C}_{\Sigma^r}^c})_{J_{\mathbb{T}}}$ pour une topologie $J_{\mathbb{T}}$ sur la catégorie localement calculable $\mathcal{C}_{\Sigma^r}^c$ engendrée par des préribles couvrants construits à partir des axiomes de $\mathbb{T}^r$.*

Ecriture simplifiée des formules géométriques

Des règles de commutation de la logique du premier ordre. –

Soit Σ n'importe quel langage du premier ordre.

- (i) Pour toutes formules géométriques de Σ en une suite finie de variables $\vec{x}$,
la formule $\varphi(\vec{x})$ et $\varphi_i(\vec{x})$, $i \in I$,
est équivalente à la formule $\bigvee_{i \in I} (\varphi(\vec{x}) \wedge \varphi_i(\vec{x}))$.
- (ii) Pour toutes formules géométriques $\varphi(\vec{x})$ et $\psi(\vec{x}, \vec{y})$ de Σ ,
la formule $\varphi(\vec{x}) \wedge (\exists \vec{y}) \psi(\vec{x}, \vec{y})$ est équivalente à la formule $(\exists \vec{y}) (\varphi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{x}, \vec{y}))$.
- (iii) Pour toutes formules géométriques $\varphi_i(\vec{x}, \vec{y})$, $i \in I$, de Σ ,
la formule $(\exists \vec{y}) \bigvee_{i \in I} \varphi_i(\vec{x}, \vec{y})$ est équivalente à la formule $\bigvee_{i \in I} (\exists \vec{y}) \varphi_i(\vec{x}, \vec{y})$.
- (iv) Les opérations de substitution à une variable x^B d'une fonction $x^B = f(x_1^{B_1}, \dots, x_m^{B_m})$
commutent avec les réunions arbitraires $\bigvee$, les intersections finies $\bigwedge$
et les opérateurs de quantification existentielle sur d'autres variables $(\exists \vec{y})$.

Corollaire. – Toute formule géométrique dans un langage Σ peut-être réécrite sous la forme

$$\varphi(\vec{x}) = \bigvee_{i \in I} (\exists \vec{x}_i) (\varphi_{i,1}(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \dots \wedge \varphi_{i,n_i}(\vec{x}, \vec{x}_i))$$

où chaque $\varphi_{i,j}$, $i \in I$, $1 \leq j \leq n_i$, est une "formule atomique".

Rappel : Une formule est "atomique" si elle a la forme $R(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})$ ou $x^B = y^B$
ou s'en déduit par un nombre fini de substitutions $x^B = f(x_1^{B_1}, \dots, x_m^{B_m})$.

Familles de précribles associées à des séquents géométriques

Observation. –

Soit Σ un langage géométrique, et soit C_Σ^c sa catégorie syntactique cartésienne.

Alors :

(i) Toute formule atomique de Σ

ou plus généralement toute conjonction finie de formules atomiques

$$\varphi(\vec{x})$$

définit un objet de la catégorie C_Σ^c .

(ii) Si $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ et $\psi(\vec{x})$ sont deux conjonctions finies de formules atomiques,

l'oubli des variables de la suite finie $\vec{y}$ définit un morphisme de C_Σ^c

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \psi(\vec{x}) \longrightarrow \psi(\vec{x}) .$$

Définition. – Dans le contexte d'un langage géométrique Σ ,

associons à toute paire de formules géométriques en une suite finie de variables $\vec{x}$

$$\varphi(\vec{x}) \quad \psi(\vec{x})$$

écrites sous forme simplifiée

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= \bigvee_{i \in I} (\exists \vec{x}_i) \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \\ \psi(\vec{x}) &= \bigvee_{k \in K} (\exists \vec{y}_k) \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k) \end{aligned}$$

(où les formules φ_i et ψ_k sont des conjonctions finies de formules atomiques),

la famille $\mathcal{P}_{\varphi, \psi}$ de précribles indexée par les éléments $i \in I$

$$(\varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k) \longrightarrow \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i))_{k \in K} .$$

Expression topologique de la démontrabilité

Théorème. –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre de langage Σ .

Soit $J_{\mathbb{T}}$ la topologie sur la catégorie syntactique cartésienne $\mathcal{C}_{\Sigma}^c$
qui définit le topos classifiant de $\mathbb{T}$ au sens que

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \widehat{(\mathcal{C}_{\Sigma}^c)_{J_{\mathbb{T}}}}.$$

Alors un séquent géométrique de Σ

$$\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$$

est démontrable dans la théorie $\mathbb{T}$ si et seulement si

tout précrible élément de la famille $\mathcal{P}_{\varphi, \psi}$

est couvrant pour la topologie $J_{\mathbb{T}}$.

Corollaire. –

Si la théorie $\mathbb{T}$ de langage Σ est définie par la famille d'axiomes

$$\varphi_j \vdash \psi_j, \quad j \in J,$$

alors un séquent géométrique de Σ

$$\varphi \vdash \psi$$

est démontrable dans $\mathbb{T}$ si et seulement si

tout précrible élément de la famille $\mathcal{P}_{\varphi, \psi}$

est couvrant pour la topologie de $\mathcal{C}_{\Sigma}^c$

engendrée par les précribles éléments des familles $\mathcal{P}_{\varphi_j, \psi_j}, j \in J$.

Traduction topologique des démonstrations : la règle des coupures

La règle des coupures. –

Si $\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$ et $\psi(\vec{x}) \vdash \chi(\vec{x})$, alors $\varphi(\vec{x}) \vdash \chi(\vec{x})$.

Traduction topologique. –

Ecrivons sous forme simplifiée

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= \bigvee_{i \in I} (\exists \vec{x}_i) \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i), \\ \psi(\vec{x}) &= \bigvee_{k \in K} (\exists \vec{y}_k) \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k), \\ \chi(\vec{x}) &= \bigvee_{\ell \in L} (\exists \vec{z}_\ell) \chi_\ell(\vec{x}, \vec{z}_\ell).\end{aligned}$$

Si pour tout élément $i \in I$ le précrible

$$(\varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k) \longrightarrow \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i))_{k \in K}$$

est couvrant, et si pour tout élément $k \in K$ le précrible

$$(\psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k) \wedge \chi_\ell(\vec{x}, \vec{z}_\ell) \longrightarrow \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k))_{\ell \in L}$$

est couvrant, alors pour tout élément $i \in I$, le précrible

$$(\varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \chi_\ell(\vec{x}, \vec{z}_\ell) \longrightarrow \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i))_{\ell \in L}$$

est couvrant.

Remarque : On utilise les trois axiomes de :

- (1) composition,
- (2) factorisation,
- (3) induction.

Traduction topologique des démonstrations : la règle d'identité

La règle d'identité. –

Pour toute variable x^A à valeur dans une sorte A , on a

$$\top(x^A) \vdash x^A = x^A .$$

Traduction topologique. –

Le monomorphisme de C_Σ^c

$$(x^A = x^A) \hookrightarrow \top(x^A)$$

est un isomorphisme, donc est couvrant.

Remarque :

On utilise les deux axiomes de :

- (0) identité,
- (2) factorisation.

Traduction topologique des démonstrations : les règles des égalités

La règle des égalités. –

- (i) On a toujours $x^A = y^A \vdash y^A = x^A$.
- (ii) On a toujours $x^A = y^A \wedge y^A = z^A \vdash x^A = z^A$.

Traduction topologique. –

- (i) Le monomorphisme de C_Σ^c

$$(x^A = y^A) \wedge (y^A = x^A) \hookrightarrow (x^A = y^A)$$

est un isomorphisme, donc est couvrant.

- (ii) Le monomorphisme de C_Σ^c

$$(x^A = y^A) \wedge (y^A = z^A) \wedge (x^A = z^A) \hookrightarrow (x^A = y^A) \wedge (y^A = z^A)$$

est un isomorphisme, donc est couvrant.

Remarque :

On utilise à nouveau les axiomes de :

- (0) identité,
- (2) factorisation.

Traduction topologique des démonstrations : la règle de substitution par une fonction

La règle de substitution par une fonction. –

Si $\varphi(\vec{x})$ et $\psi(\vec{x})$ sont deux formules géométriques en une suite finie de variables $\vec{x}$,

et $\varphi'(\vec{x}')$ et $\psi'(\vec{x}')$ sont les deux formules qui s'en déduisent

en substituant à l'une des variables x^A de $\vec{x}$ une fonction $f(x_1^{A'_1}, \dots, x_m^{A'_m}) = x^A$,

alors l'implication $\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$

entraîne l'implication $\varphi'(\vec{x}') \vdash \psi'(\vec{x}')$.

Traduction topologique. – Ecrivons les formules $\varphi(\vec{x})$ et $\psi(\vec{x})$ sous forme simplifiée

$$\varphi(\vec{x}) = \bigvee_{i \in I} (\exists \vec{x}_i) \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i),$$

$$\psi(\vec{x}) = \bigvee_{k \in K} (\exists \vec{y}_k) \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k)$$

où les $\varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i)$ et $\psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k)$ sont des conjonctions finies de formules atomiques.

La substitution par $x^A = f(x_1^{A'_1}, \dots, x_m^{A'_m})$ transforme celles-ci en des formules

$$\varphi'_i(\vec{x}', \vec{x}_i) \quad \text{et} \quad \psi'_k(\vec{x}', \vec{y}_k).$$

Si les précribles

$$(\varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k) \longrightarrow \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i))_{k \in K}$$

sont couvrants, il en est de même des précribles

$$(\varphi'_i(\vec{x}', \vec{x}_i) \wedge \psi'_k(\vec{x}', \vec{y}_k) \longrightarrow \varphi'_i(\vec{x}', \vec{x}_i))_{k \in K}$$

induits par les morphismes $\varphi'_i(\vec{x}', \vec{x}_i) \xrightarrow{x^A = f(x_1^{A'_1}, \dots, x_m^{A'_m})} \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i).$

Remarque : On utilise l'axiome (3) d'induction.

Traduction topologique des démonstrations : la règle de substitution des égalités dans des termes

Définition. – Un “terme” $h(\vec{x})$ en une suite finie de variables $\vec{x}$ à valeur dans une sorte B peut être

- une variable de $\vec{x}$ associée à la sorte B ,
- une fonction en une partie des variables de $\vec{x}$ à valeur dans la sorte B ,
- une expression obtenue à partir d’une fonction à valeur dans la sorte B par une suite finie de substitutions de variables par des fonctions.

La règle de substitution d’une égalité dans un terme. –

Considérons deux termes $g(x_1^{A'_1}, \dots, x_m^{A'_m})$ et $h(x_1^{A'_1}, \dots, x_m^{A'_m})$ à valeur dans une sorte A .

Considérons une suite finie de variables $\vec{x}$ qui comprend une variable x^A associée à A ,

et la suite $\vec{x}'$ déduite de $\vec{x}$ en remplaçant x^A par $x_1^{A'_1}, \dots, x_m^{A'_m}$.

Alors, pour tout terme $k(\vec{x})$ et les termes $k_1(\vec{x}')$, $k_2(\vec{x}')$ qui s’en déduisent

par les substitutions $x^A = g(x_1^{A'_1}, \dots, x_m^{A'_m})$, $x^A = h(x_1^{A'_1}, \dots, x_m^{A'_m})$,

l’implication $\top \vdash g(x_1^{A'_1}, \dots, x_m^{A'_m}) = h(x_1^{A'_1}, \dots, x_m^{A'_m})$

entraîne l’implication $\top \vdash k_1(\vec{x}') = k_2(\vec{x}')$.

Traduction topologique. – Les termes g, h et k définissent des morphismes

$$\top(\vec{x}') \xrightarrow[h]{g} \top(\vec{x}) \xrightarrow{k} \top(y^B).$$

Le monomorphisme $(k \circ g = k \circ h) \hookrightarrow \top(\vec{x}')$ est couvrant

si le monomorphisme $(g = h) \hookrightarrow \top(\vec{x}')$ est couvrant

puisque’on a une factorisation $(g = h) \hookrightarrow (k \circ g = k \circ h)$.

Traduction topologique des démonstrations : la règle de substitution d'une égalité dans une formule

La règle de substitution d'une égalité dans une formule. –

Soient deux termes $g(x_1'^{A'_1}, \dots, x_m'^{A'_m})$ et $h(x_1'^{A'_1}, \dots, x_m'^{A'_m})$ à valeur dans une sorte A .

Soient une suite finie de variables $\vec{x}$ qui comprend une variable x^A associée à A

et la suite $\vec{x}'$ déduite de $\vec{x}$ en remplaçant x^A par $x_1'^{A'_1}, \dots, x_m'^{A'_m}$.

Alors, pour toute formule géométrique $\varphi(\vec{x})$ et les formules $\varphi^g(\vec{x}')$, $\varphi^h(\vec{x}')$

qui s'en déduisent par les substitutions $x^A = g(x_1'^{A'_1}, \dots, x_m'^{A'_m})$, $x^A = h(x_1'^{A'_1}, \dots, x_m'^{A'_m})$,

l'implication $\top \vdash g(x_1'^{A'_1}, \dots, x_m'^{A'_m}) = h(x_1'^{A'_1}, \dots, x_m'^{A'_m})$

entraîne l'équivalence $\varphi^g(\vec{x}') \dashv\vdash \varphi^h(\vec{x}')$.

Traduction topologique. – Ecrivant sous forme simplifiée $\varphi(\vec{x}) = \bigvee_{i \in I} (\exists \vec{x}_i) \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i)$, on a

$$\varphi^g(\vec{x}') = \bigvee_{i \in I} (\exists \vec{x}_i) \varphi_i^g(\vec{x}', \vec{x}_i) \quad \text{et} \quad \varphi^h(\vec{x}') = \bigvee_{i \in I} (\exists \vec{x}_i) \varphi_i^h(\vec{x}', \vec{x}_i).$$

Les formules $\varphi_i^g(\vec{x}', \vec{x}_i)$ et $\varphi_i^h(\vec{x}', \vec{x}_i)$ s'inscrivent dans des carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_i^g(\vec{x}', \vec{x}_i) \hookrightarrow \top(\vec{x}', \vec{x}_i) & & \varphi_i^h(\vec{x}', \vec{x}_i) \hookrightarrow \top(\vec{x}', \vec{x}_i) \\ \downarrow & \downarrow g & \downarrow \\ \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \hookrightarrow \top(\vec{x}, \vec{x}_i) & & \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \hookrightarrow \top(\vec{x}, \vec{x}_i) \end{array}$$

Ils contiennent le sous-objet commun $\varphi_i^g(\vec{x}', \vec{x}_i) \wedge (g = h) = \varphi_i^h(\vec{x}', \vec{x}_i) \wedge (g = h)$

et les deux monomorphismes

$$\varphi_i^g(\vec{x}', \vec{x}_i) \wedge (g = h) \hookrightarrow \varphi_i^g(\vec{x}', \vec{x}_i) \quad \varphi_i^h(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge (g = h) \hookrightarrow \varphi_i^h(\vec{x}, \vec{x}_i)$$

sont couvrants puisque le monomorphisme $(g = h) \hookrightarrow \top(\vec{x}')$ est couvrant par hypothèse.

Traduction topologique des démonstrations : la règle des conjonctions finies

Cette règle se réduit à :

La règle de conjonction binaire. –

Etant données trois formules géométriques $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}), \chi(\vec{x})$

en une même suite finie de variables $\vec{x}$, on a l'implication

$$\varphi \vdash \psi \wedge \chi$$

si et seulement si on a les deux implications

$$\varphi \vdash \psi \quad \text{et} \quad \varphi \vdash \chi.$$

Traduction topologique. –

Ecrivant sous forme simplifiée

$$\varphi = \bigvee_{i \in I} \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i),$$

$$\psi = \bigvee_{k \in K} (\exists \vec{y}_k) \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k)$$

et

$$\chi = \bigvee_{\ell \in L} (\exists \vec{z}_\ell) \chi_\ell(\vec{x}, \vec{z}_\ell),$$

on a $\varphi \vdash \psi$ et $\varphi \vdash \chi$

si et seulement si, pour tout $i \in I$, les deux familles de morphismes

$$(\varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k) \longrightarrow \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i))_{k \in K}$$

et

$$(\varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \chi_\ell(\vec{x}, \vec{z}_\ell) \longrightarrow \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i))_{\ell \in L}$$

sont couvrantes.

La règle de conjonction binaire: carrés cartésiens de recouvrements

Pour tous indices $i \in I, k \in K, \ell \in L$, on a un carré cartésien:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k) \wedge \chi_\ell(\vec{x}, \vec{z}_\ell) & \longrightarrow & \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \chi_\ell(\vec{x}, \vec{z}_\ell) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k) & \longrightarrow & \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \end{array}$$

Comme les familles de morphismes

$$\begin{aligned} (\varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k) &\longrightarrow \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i))_{k \in K}, \\ (\varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \chi_\ell(\vec{x}, \vec{z}_\ell) &\longrightarrow \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i))_{\ell \in L} \end{aligned}$$

sont couvranes, on déduit des axiomes topologiques

$$\begin{cases} (1) & \text{composition,} \\ (3) & \text{induction,} \end{cases}$$

que, pour tout $i \in I$, la famille de morphismes

$$(\varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k) \wedge \chi_\ell(\vec{x}, \vec{z}_\ell) \longrightarrow \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i))_{k \in K, \ell \in L}$$

est couvrante.

Cela traduit l'implication $\varphi \vdash \psi \wedge \chi$ puisque

$\psi \wedge \chi$ s'écrit sous forme simplifiée

$$\psi \wedge \chi = \bigvee_{\substack{k \in K \\ \ell \in L}} (\exists \vec{y}_k)(\exists \vec{z}_\ell) (\psi_k(\vec{x}, \vec{y}_k) \wedge \chi_\ell(\vec{x}, \vec{z}_\ell)).$$

Traduction topologique des démonstrations : la règle des disjonctions

La règle des disjonctions. –

Etant données des formules géométriques $\varphi(\vec{x})$ et $\varphi_k(\vec{x})$, $k \in K$,
on a les implications $\varphi_k(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$ pour tout $k \in K$
si et seulement si on a l'implication $\bigvee_{k \in K} \varphi_k(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$.

Traduction topologique.– Ecrivons sous formes simplifiées

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= \bigvee_{i \in I} (\exists \vec{x}_i) \varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i), \\ \varphi_k(\vec{x}) &= \bigvee_{\ell \in L_k} (\exists \vec{y}_{k,\ell}) \varphi_{k,\ell}(\vec{x}, \vec{y}_{k,\ell})\end{aligned}$$

et donc

$$\bigvee_{k \in K} \varphi_k(\vec{x}) = \bigvee_{k \in K} \bigvee_{\ell \in L_k} (\exists \vec{y}_{k,\ell}) \varphi_{k,\ell}(\vec{x}, \vec{y}_{k,\ell}).$$

L'implication $\bigvee_{k \in K} \varphi_k(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$

se traduit par le fait que, pour tous indices $k \in K$, $\ell \in L_k$, la famille

$$(\varphi_i(\vec{x}, \vec{x}_i) \wedge \varphi_{k,\ell}(\vec{x}, \vec{y}_{k,\ell}) \longrightarrow \varphi_{k,\ell}(\vec{x}, \vec{y}_{k,\ell}))_{i \in I}$$

est couvrante.

C'est aussi la traduction de la famille d'implications

$$\varphi_k(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x}), \quad k \in K.$$

Remarque:

Ainsi, la règle des disjonctions est une tautologie dans sa traduction topologique.

Traduction topologique des démonstrations : la règle des quantifications existentielles

La règle de quantification existentielle. –

Etant données des formules géométriques $\psi(\vec{x})$ et $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$,

l'implication $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \vdash_{\vec{x}, \vec{y}} \psi(\vec{x})$

équivalent à l'implication $(\exists \vec{y}) \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \vdash_{\vec{x}} \psi(\vec{x})$.

Traduction topologique.– Ecrivons sous formes simplifiées

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}) &= \bigvee_{k \in K} (\exists \vec{x}_k) \psi_k(\vec{x}, \vec{x}_k), \\ \varphi(\vec{x}, \vec{y}) &= \bigvee_{\ell \in L} (\exists \vec{z}_\ell) \varphi_\ell(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_\ell),\end{aligned}$$

et donc

$$(\exists \vec{y}) \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \bigvee_{\ell \in L} (\exists \vec{y}) (\exists \vec{z}_\ell) \varphi_\ell(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_\ell).$$

L'implication $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \vdash_{\vec{x}, \vec{y}} \psi(\vec{x})$

se traduit par le fait, que pour tout indice $\ell \in L$, la famille

$$(\varphi_\ell(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_\ell) \wedge \psi_k(\vec{x}, \vec{x}_k) \longrightarrow \varphi_\ell(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_\ell))_{k \in K}$$

est couvrante.

C'est aussi la traduction topologique de l'implication

$$(\exists \vec{y}) \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \vdash_{\vec{x}} \psi(\vec{x}).$$

Remarque:

Ainsi, la règle de quantification existentielle est aussi une tautologie
dans sa traduction topologique.

Traduction topologique des démonstrations : les règles de commutation

Les règles de commutation. –

- (i) (Distributivité) Pour toutes formules géométriques $\varphi(\vec{x})$ et $\varphi_i(\vec{x})$, $i \in I$,
la formule $\varphi(\vec{x}) \wedge \bigvee_{i \in I} \varphi_i(\vec{x})$
équivalent à la formule $\bigvee_{i \in I} (\varphi(\vec{x}) \wedge \varphi_i(\vec{x}))$.
- (ii) (Règle de Frobenius) Pour toutes formules géométriques $\varphi(\vec{x})$ et $\psi(\vec{x}, \vec{y})$,
la formule $\varphi(\vec{x}) \wedge (\exists \vec{y}) \psi(\vec{x}, \vec{y})$
équivalent à la formule $(\exists \vec{y}) (\varphi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{x}, \vec{y}))$.
- (iii) Pour toutes formules géométriques $\varphi_i(\vec{x}, \vec{y})$, $i \in I$,
la formule $(\exists \vec{y}) (\bigvee_{i \in I} \varphi_i(\vec{x}, \vec{y}))$
équivalent à la formule $\bigvee_{i \in I} (\exists \vec{y}) \varphi_i(\vec{x}, \vec{y})$.

Traduction topologique.–

Dans les trois cas (i), (ii) et (iii), les deux formules considérées ont la même réécriture sous forme simplifiée.

En fait, la réécriture des formules géométriques sous formes simplifiée repose sur ces trois règles de commutation.

Autrement dit, ces règles de commutation sont contenues dans le processus de traduction topologique des formules.