

Traduction topologique de la logique du premier ordre

par Laurent LAFFORGUE

(Centre Lagrange, Huawei Technologies France)

Juin 2026

Langages du premier ordre

Définition. –

Un “langage du premier ordre” Σ consiste en

- un ensemble de “noms d’objets” ou “sortes”,
- un ensemble de “noms (ou symboles) de relation”
$$R \mapsto A_1 \cdots A_n$$

dans le contexte d’une suite finie de sortes $A_1, \dots, A_n, n \geq 0$,
- un ensemble de “noms (ou symboles) de fonction”
$$f : A_1 \cdots A_n \longrightarrow B$$

sur une suite finie de sortes $A_1, \dots, A_n, n \geq 0$,
à valeur dans une sorte B .

Remarque:

Un tel langage est dit

- “relationnel” s’il ne comporte pas de noms de fonction,
- “algébrique” s’il ne comporte pas de noms de relation,
- “propositionnel” s’il ne comporte que des noms de relation $R \mapsto$.

Les formules du premier ordre et leur formation

Définition. –

- (i) Un “contexte” est une suite finie de variables $\vec{x} = (x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})$ associées à des sortes $A_1, \dots, A_n$ du langage Σ .
- (ii) Une formule $\varphi(\vec{x})$ dans un contexte $\vec{x}$ peut être
- une relation $R(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})$ entre une partie des variables de $\vec{x}$, pour un symbole de relation $R \mapsto A_1 \cdots A_n$ de Σ ,
 - une égalité $x^B = y^B$ entre deux variables de $\vec{x}$ de même sorte,
 - déduite de formules déjà définies en formant
 - des substitutions $x^B = f(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})$ de variables par des symboles de fonction $f : A_1 \cdots A_n \rightarrow B$ appliqués à des variables,
 - une conjonction finie $\wedge$ ou infinie $\bigwedge$ de formules $\varphi_i(\vec{x})$, $i \in I$, de même contexte $\vec{x}$, et le symbole du “vrai” $\top(\vec{x})$ en le contexte $\vec{x}$,
 - une disjonction finie $\vee$ ou infinie $\bigvee$ de formules $\varphi_i(\vec{x})$, $i \in I$, de même contexte $\vec{x}$, et le symbole du “faux” $\perp(\vec{x})$ en le contexte $\vec{x}$,
 - des quantifications existentielles ou universelles sur d’autres variables $(\exists \vec{y}) \varphi(\vec{x}, \vec{y})$ ou $(\forall \vec{y}) \varphi(\vec{x}, \vec{y})$,
 - la négation d’une formule ou l’implication entre deux formules $\neg \varphi(\vec{x})$ ou $(\varphi(\vec{x}) \Rightarrow \psi(\vec{x}))$.

Quelques mots de rappel sur l'interprétation des formules

Définition. –

Un “modèle” d'un langage Σ dans un topos $\mathcal{E}$ (comme $\mathcal{E} = \text{Ens}$) est une application

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{sorte } A \text{ de } \Sigma & \mapsto \text{objet } MA \text{ de } \mathcal{E}, \\ \text{nom de relation } (R \mapsto A_1 \cdots A_n) & \mapsto \text{sous-objet } MR \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n, \\ \text{nom de fonction } (f : A_1 \cdots A_n \rightarrow B) & \mapsto \text{morphisme } MA_1 \times \cdots \times MA_n \xrightarrow{Mf} MB. \end{array} \right.$$

Principe.–

Toute formule $\varphi(\vec{x})$ dans un contexte $\vec{x} = (x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})$ définit un sous-objet $M\varphi \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n$.

Règles de formation des sous-objets définis par des formules :

- les substitutions $x^B = f(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})$ définissent les images réciproques de sous-objets par le morphisme $Mf : MA_1 \times \cdots \times MA_n \rightarrow MB$,
- les conjonctions définissent les intersections de sous-objets,
- les disjonctions définissent les réunions de sous-objets,
- les quantifications $(\exists \vec{y})$ et $(\forall \vec{y})$ sur $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n}, y_1^{B_1}, \dots, y_m^{B_m})$ définissent les images p_* et $p^!$ par les foncteurs adjoints à droite et à gauche du foncteur d'image réciproque des sous-objets p^{-1} par
$$p : MA_1 \times \cdots \times MA_n \times MB_1 \times \cdots \times MB_m \longrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n,$$
- les négations $\neg\varphi$ et implications $(\varphi \Rightarrow \psi)$ s'interprètent comme
$$\max\{S \mid S \cap M\varphi = \emptyset\} \quad \text{et} \quad \max\{S \mid S \cap M\varphi \subseteq M\psi\}.$$

Formules géométriques

Définition. – Un morphisme de topos $\mathcal{E}' \xrightarrow{e} \mathcal{E}$

est une paire de foncteurs adjoints $(\mathcal{E} \xrightarrow{e^*} \mathcal{E}', \mathcal{E}' \xrightarrow{e_*} \mathcal{E})$

dont la composante $e^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ respecte non seulement les colimites mais aussi les limites finies.

Proposition. –

(i) Les composantes d'images réciproques $e^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ des morphismes de topos $e : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$ transforment

<u>les objets de</u> $\mathcal{E}$	en	<u>objets de</u> $\mathcal{E}'$,
<u>produits finis d'objets</u>	en	<u>produits finis</u> ,
<u>morphismes</u>	en	<u>morphismes</u> ,
<u>sous-objets</u>	en	<u>sous-objets</u> .

(ii) Elles respectent

- les images réciproques de sous-objets par des morphismes,
- les intersections finies (mais pas les intersections infinies en général),
- les réunions arbitraires,
- les interprétations p_* des symboles $\exists$
(mais pas les interprétations $p_!$ des symboles $\forall$ en général,
non plus que les interprétations des négations $\neg$ et implications $\Rightarrow$).

Définition. –

Une formule est dite “géométrique” si sa formation ne comporte que les symboles $\wedge, \top, \vee, \perp, \exists$ et non pas les symboles $\bigwedge, \forall, \neg, \Rightarrow$.

Théories du premier ordre

Définition. –

(i) Une théorie du premier ordre $\mathbb{T}$ consiste en

- $$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ un } \underline{\text{langage du premier ordre}} \Sigma, \\ \bullet \text{ une } \underline{\text{famille d'axiomes}} \text{ qui sont des "séquents" (ou "implications")} \\ \quad \varphi_i(\vec{x}_i) \vdash \psi_i(\vec{x}_i) \text{ entre } \underline{\text{formules}} \text{ de } \underline{\text{même contexte}} \vec{x}_i. \end{array} \right.$$

(ii) Un "séquent" reliant deux formules de même contexte

$$\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$$

est dit "démontrable" dans $\mathbb{T}$ s'il se déduit des axiomes
par les "règles d'inférence de la logique du premier ordre".

Définition. –

Une théorie du premier ordre $\mathbb{T}$ est dite "géométrique"
si tous ses axiomes

$$\varphi_i(\vec{x}_i) \vdash \psi_i(\vec{x}_i)$$

relient des formules φ_i, ψ_i qui sont "géométriques"

(et donc dont les interprétations sont respectées

par les composantes d'image réciproque $e^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$
des morphismes de topos $e : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$).

Sémantique des théories du premier ordre

Définition. –

Soit un langage du premier ordre Σ .

Soit un “séquent” reliant deux formules de Σ

$$\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x}) \quad \text{de même contexte } \vec{x} = (x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n}).$$

On dit qu’un modèle M de Σ dans un topos $\mathcal{E}$

vérifie le séquent $\varphi \vdash \psi$

si les deux sous-objets $M\varphi$ et $M\psi$ de $MA_1 \times \dots \times MA_n$ définis par φ et ψ

satisfont la relation d’inclusion $M\varphi \subseteq M\psi$.

Définition. –

Un modèle M dans un topos $\mathcal{E}$ d’une théorie $\mathbb{T}$ de langage Σ

est un modèle M de Σ dans $\mathcal{E}$

qui vérifie tous les axiomes $\varphi_i \vdash \psi_i$ qui définissent $\mathbb{T}$.

Proposition. –

Tout modèle M d’une théorie $\mathbb{T}$ de langage Σ

satisfait tous les séquents $\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$ de Σ qui sont démontrables dans $\mathbb{T}$.

Le théorème d'existence des topos classifiants

Des travaux successifs de Monique Hakim (avec Grothendieck), Lawvere, Joyal, ... ont abouti à :

Théorème (Makkai, Reyes, 1975). –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre.

Alors il existe un topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ (appelé le topos classifiant de $\mathbb{T}$)

muni d'un modèle $U_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ (appelé le modèle universel de $\mathbb{T}$)

tel que, pour tout topos $\mathcal{E}$, le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \text{Geom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}}) & \longrightarrow & \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{E}) \\ \parallel & & \parallel \\ \left\{ \frac{\text{catégorie des morphismes}}{\text{de topos } e : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}} \right\} & & \left\{ \frac{\text{catégorie des modèles } M}{\text{de } \mathbb{T} \text{ dans } \mathcal{E}} \right\} \\ e & \longmapsto & e^* U_{\mathbb{T}} \end{array}$$

soit une équivalence de catégories.

Théorème. –

Si $\mathbb{T}$ est une théorie géométrique de langage Σ ,

un séquent géométrique $\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x})$ est démontrable dans $\mathbb{T}$

si et seulement si il est satisfait par le modèle $U_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$.

Réduction aux théories géométriques

Définition (Morley). –

A toute théorie du premier ordre $\mathbb{T}$ de langage Σ et d'axiomes

$$\varphi_i(\vec{x}_i) \vdash \psi_i(\vec{x}_i), \quad i \in I,$$

on associe la théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$,

dont le langage $\Sigma_{\mathcal{M}}$ est le langage Σ complété par des symboles de relation,
construite de la manière suivante :

- (1) Chaque fois que dans la construction des $\varphi_i, \psi_i, i \in I$,
il apparaît une implication $\varphi(\vec{x}) \Rightarrow \psi(\vec{x})$,
on la remplace par la formule $(\neg\varphi(\vec{x})) \vee \psi(\vec{x})$.
- (2) Chaque fois que dans cette construction,
il apparaît une quantification universelle $(\forall \vec{y})\varphi(\vec{x}, \vec{y})$,
on la remplace par la formule $\neg(\exists \vec{y})(\neg\varphi(\vec{x}, \vec{y}))$.
- (3) Ces substitutions étant faites, chaque fois qu'il apparaît une négation

$$\neg\varphi(\vec{x}) \quad \text{d'une formule } \varphi \text{ de contexte } \vec{x} = (x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})$$

dans la construction des formules réécrites composant les axiomes,
on remplace cette négation par un nouveau symbole de relation

$$N_\varphi \mapsto A_1 \cdots A_n$$

soumis aux axiomes supplémentaires

$$\varphi(\vec{x}) \wedge N_\varphi(\vec{x}) \vdash \perp \quad \text{et} \quad \top \vdash \varphi(\vec{x}) \vee N_\varphi(\vec{x}).$$

Effet des réductions géométriques sur la sémantique des théories

Proposition. –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie du premier ordre.

Soit $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ la théorie qui s'en déduit par le processus de Morley.

Alors :

- (i) Pour tout topos $\mathcal{E}$, on a un foncteur canonique

$$\mathbb{T}_{\mathcal{M}}\text{-Mod}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{E})$$

qui est injectif à la fois sur les objets et sur les morphismes.

- (ii) Si $\mathcal{E}$ est le topos des ensembles
ou plus généralement un topos “booléen”,
le foncteur canonique

$$\mathbb{T}_{\mathcal{M}}\text{-Mod}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{E})$$

est bijectif sur les objets

(mais pas nécessairement sur les morphismes).

Remarque :

Un topos est “booléen” si, pour tout sous-objet $S \hookrightarrow E$ d'un objet E ,

son complémentaire $E \setminus S = \max\{S' \hookrightarrow E \mid S' \cap S = \emptyset\}$

vérifie $(E \setminus S) \cup S = E$.

Le problème de présentation des topos classifiants

Théorème. – Le topos classifiant d'une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ peut être présenté comme le topos des faisceaux

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}} = (\widehat{C_{\mathbb{T}}})_{J_{\mathbb{T}}}$$

sur la catégorie syntactique géométrique $C_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ munie de sa topologie canonique $J_{\mathbb{T}}$.

Définition. – Si $\mathbb{T}$ est une théorie géométrique du premier ordre de langage Σ , sa catégorie syntactique $C_{\mathbb{T}}$ est ainsi définie :

(i) Les objets de $C_{\mathbb{T}}$ sont les formules géométriques de Σ

$$\varphi(\vec{x}) \quad \text{en des contextes } \vec{x} = (x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})$$

à renomination près des variables.

(ii) Les morphismes de $C_{\mathbb{T}}$ sont les formules géométriques

$$\varphi(\vec{x}) \xrightarrow{\theta(\vec{x}, \vec{y})} \psi(\vec{y})$$

qui sont "démontrablement fonctionnelles" dans $\mathbb{T}$.

(iii) La "topologie canonique" de $C_{\mathbb{T}}$ est celle pour laquelle une famille de morphismes

$$\theta_i(\vec{x}_i, \vec{y}) : \varphi_i(\vec{x}_i) \longrightarrow \psi(\vec{y}), \quad i \in I,$$

est "couvrante" si et seulement si le séquent

$$\psi(\vec{y}) \vdash \bigvee_{i \in I} (\exists \vec{x}_i) \theta_i(\vec{x}_i, \vec{y}) \quad \text{est } \underline{\text{démontrable}} \text{ dans } \mathbb{T}.$$

Topologies de Grothendieck et sous-topos

Définition. – Une topologie de Grothendieck J sur une catégorie $\mathcal{C}$ est une notion de “précrible” couvrant des objets X de $\mathcal{C}$ par des familles de morphismes

telle que : $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$

(0) (Identité) Pour tout objet X , $X \xrightarrow{\text{id}} X$ est couvrant.

(1) (Composition) Si $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$ est J -couvrant

et, pour tout $i \in I$, $(X_{i,j} \xrightarrow{x_{i,j}} X_i)_{j \in I_i}$ est J -couvrant, alors $(X_{i,j} \xrightarrow{x_i \circ x_{i,j}} X)_{i \in I, j \in I_i}$ est J -couvrant.

(2) (Factorisation) Si $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$ est J -couvrant,

et si chaque $X_i \xrightarrow{x_i} X$ se factorise à travers un $X'_{i'} \xrightarrow{x'_{i'}} X$, $i' \in I'$,

alors le précrible $(X'_{i'} \xrightarrow{x'_{i'}} X)_{i' \in I'}$ est J -couvrant.

(3) (Induction) Pour tout morphisme $X' \xrightarrow{x} X$ et tout précrible J -couvrant $(X_i \xrightarrow{x_i} X)_{i \in I}$,

il existe un précrible J -couvrant $(X'_{i'} \xrightarrow{x'_{i'}} X')_{i' \in I'}$ tel que

- chaque morphisme composé $x \circ x'_{i'} : X'_{i'} \rightarrow X' \rightarrow X$
se factorise à travers l'un des $X_i \xrightarrow{x_i} X$.

Théorème (Grothendieck). – Il existe une notion intrinsèque de sous-topos des topos $\mathcal{E}$ telle que, si $\mathcal{E} \cong \mathcal{C}_J$ est présenté comme topos des J -faisceaux sur une catégorie $\mathcal{C}$, les sous-topos de $\mathcal{E}$ correspondent aux topologies J' de $\mathcal{C}$ qui raffinent J .

Sous-topos et théories quotients

Théorème (Caramello). –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre de langage Σ .

- (i) Toute “théorie quotient” $\mathbb{T}'$ de $\mathbb{T}$,
c’est-à-dire de même langage Σ et déduite de $\mathbb{T}$ en ajoutant des axiomes,
a pour topos classifiant un sous-topos de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$
$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}.$$
- (ii) Deux théorie quotients $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ de $\mathbb{T}$
définissent le même sous-topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}_1} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}_2} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$
si et seulement si elles sont “syntactiquement équivalentes”
au sens que les axiomes de l’une sont démontrables à partir des axiomes de l’autre.
- (iii) Tout sous-topos de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$
est le topos classifiant d’une théorie quotient $\mathbb{T}'$ de $\mathbb{T}$.

Conséquence :

Il existe une équivalence constructive entre

- les problèmes de démontrabilité en logique géométrique du premier ordre,
- les problèmes d’engendrement de topologies de Grothendieck.

Théories cartésiennes et catégories syntactiques cartésiennes

Définition. –

- (i) Une formule géométrique d'un langage Σ est dite
- “atomique” si elle est déduite d'une formule de la forme
$$R(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n}) \text{ pour un symbole de relation } R \mapsto A_1 \cdots A_n \text{ de } \Sigma$$
ou $x_1^B = x_2^B$ pour une sorte B de Σ ,
par substitution un nombre fini de fois de variables y^B par
$$y^B = f(x_1^{B_1}, \dots, x_m^{B_m}) \text{ pour des symboles de fonction } f : B_1 \cdots B_m \rightarrow B \text{ de } \Sigma,$$
 - “de Horn” si elle est une conjonction finie de “formules atomiques”.
- (ii) Une formule de Σ est dite “ $\mathbb{T}$ -cartésienne” pour une théorie $\mathbb{T}$ de langage Σ si elle a la forme
$$(\exists \vec{y}) \varphi(\vec{x}, \vec{y})$$
pour une “formule de Horn” $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ telle que le séquent
$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \varphi(\vec{x}, \vec{y}') \vdash \vec{y} = \vec{y}'$$
 est démontrable dans $\mathbb{T}$.
- (iii) Une théorie $\mathbb{T}$ de langage Σ est dite cartésienne si on peut la définir par une famille d'axiomes
$$\varphi_i(\vec{x}_i) \vdash \psi_i(\vec{x}_i), \quad i \in I,$$
constitués de formules $\mathbb{T}$ -cartésiennes $\varphi_i, \psi_i, i \in I$.

Définition. – Si $\mathbb{T}$ est une théorie cartésienne, sa catégorie syntactique cartésienne est la sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^c \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

constituée des objets $\varphi(\vec{x})$ et morphismes $\theta(\vec{x}, \vec{y}) : \varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{y})$ qui sont des formules $\mathbb{T}$ -cartésiennes.

Représentation par les catégories syntactiques cartésiennes

Théorème. –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique qui est cartésienne.

Alors son topos classifiant se présente comme topos des préfaisceaux

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \widehat{\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^c}$$

sur la catégorie syntactique cartésienne de $\mathbb{T}$.

Remarques :

- (i) En particulier, toute théorie sans axiome,
c'est-à-dire réduite à un seul langage Σ , est cartésienne
et l'on a
- (ii) Toute théorie algébrique est également cartésienne.
- (iii) Plus généralement, on dit qu'une théorie $\mathbb{T}$ est "de type préfaisceau"
si son topos classifiant se présente comme topos de préfaisceaux

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \widehat{\mathcal{C}} \quad \text{sur une } \underline{\text{catégorie } \mathcal{C}}.$$

On montre que, si $\mathbb{T}$ est de type préfaisceau, on a toujours

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \widehat{\mathcal{M}^{\text{op}}}$$

où $\mathcal{M}$ désigne la sous-catégorie pleine

$$\mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{T}\text{-Mod}(\text{Ens})$$

des modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$

qui sont "présentables" par un ensemble fini de générateurs et de relations.

Le problème de calculabilité dans les catégories

Observation. – Toute théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ peut être présentée, en général de multiples façons, comme une “théorie quotient” d’une théorie cartésienne $\mathbb{T}_c$.

Explication : On peut prendre pour théorie cartésienne $\mathbb{T}_c$

- { – la théorie sans axiome réduite au langage Σ de $\mathbb{T}$,
- n’importe quelle théorie de langage Σ définie par une famille d’axiomes $\mathbb{T}$ -cartésiens démontrables dans $\mathbb{T}$.

Conséquences :

- Le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est un sous-topos de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}_c} \cong \widehat{\mathcal{C}_{\mathbb{T}_c}^c}$.
- On a $\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong (\widehat{\mathcal{C}_{\mathbb{T}_c}^c})_{J_{\mathbb{T}}}$ pour une topologie $J_{\mathbb{T}}$ sur $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_c}^c$ engendrée par des précribles couvrants construits à partir des axiomes de $\mathbb{T}$.
- Tout problème de démontrabilité dans $\mathbb{T}$ équivalait à demander si certains précribles de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_c}^c$ sont couvrants pour la topologie engendrée $J_{\mathbb{T}}$.

Problème.–

En général, les ensembles de morphismes entre deux objets des catégories

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}_c}^c = \mathcal{M}^{\text{op}} \quad (\text{où } \mathcal{M} = \mathbb{T}_c\text{-Mod}(\text{Ens})_{\text{pf}})$$

ne sont pas calculables,

et le problème de factorisabilité d’un morphisme à travers un autre est trop difficile.